Algoritmi e Principi dell'Informatica
Prima Prova in Itinere

18 Novembre 2011

Esercizio 1 (punti 7/12)

Si considerino le seguenti definizioni:

1. Una grammatica si dice **lineare a destra** se le sue produzioni sono del tipo
   A ----> Bx, $x \in V_T^*$, oppure, A ----> x, $x \in V_T^*$.
2. Una grammatica si dice **lineare a sinistra** se le sue produzioni sono del tipo
   A ----> xB, $x \in V_T^*$, oppure, A ----> x, $x \in V_T^*$.
3. Una grammatica si dice **lineare a destra o a sinistra** se le sue produzioni sono del tipo
   A ----> Bx, $x \in V_T^*$, oppure, A ----> xB, $x \in V_T^*$,
   oppure, A ----> x, $x \in V_T^*$.
4. Una grammatica si dice **lineare** se le sue produzioni sono del tipo
   A ----> yBx con y, $x \in V_T^*$, oppure, A ----> x, $x \in V_T^*$.

Si confrontino tra loro le potenze generative (le famiglie di linguaggi generati) delle suddette classi di grammatiche tra loro e con quelle dei seguenti formalismi:

a. Automi a stati finiti
b. Automi a pila deterministici
c. Automi a pila nondeterministici
d. Reti di Petri (senza archi inibitori)

Nota. Ogni relazione tra le diverse potenze generative deve essere accompagnata da una breve giustificazione; non è necessario che essa sia una rigorosa dimostrazione matematica ma deve essere sufficientemente chiara e convincente.

Esercizio 2 (punti 6/12)

Nel "problema delle 8 regine" si vogliono posizionare 8 regine su una scacchiera 8×8 (inizialmente vuota) in modo che nessuna regina "attacchi" (ossia si trovi sulla stessa riga, colonna o diagonale di) un'altra regina.
Formalizzare tramite logica del prim'ordine una formula che specifichi tutti i requisiti del problema (e quindi sia vera se e solo se i pezzi sulla scacchiera corrispondono a una soluzione).

Suggerimento: si consiglia di adottare un predicato relativo al posizionamento di una regina sulla scacchiera, ad esempio il predicato ternario $p(N, X, Y)$ i cui argomenti sono numeri tra 1 e 8 e che indica che la regina numero N si trova alla colonna X e alla riga Y della scacchiera.

Soluzione dell'esercizio 1

a. Le grammatiche lineari a sinistra (GLS) sono una sorta di abbreviazione delle grammatiche regolari: infatti, ad esempio la produzione

A ----> acB

può essere trasformata nella coppia di produzioni regolari equivalenti

A ----> aA1; A1 ---> cB

con A1 simbolo *nuovo*.

Quindi le GLS sono equipotenti agli automi a stati finiti.

b. Gli automi a stati finiti sono equivalenti non solo alle grammatiche regolari le cui produzioni sono del tipo A ---> aB, ma anche a quelle con produzioni del tipo A ---> Ba (che a loro volta sono equivalenti alle lineari a destra con ragionamento analogo al punto a.), purché esse non contengano *contemporaneamente* produzioni dei due tipi:

Basta infatti associare ad una transizione del tipo $\delta(A, a) = B$ una produzione del tipo B ----> Aa, invece che A ---> aB e "invertire stati finali con assioma: la derivazione parte dalla fine della stringa invece che dall'inizio.

Quindi GLS, GLD, grammatiche regolari e automi a stati finiti sono tutti equipotenti.

d. Le grammatiche lineari a destra o a sinistra sono equipotenti alle grammatiche lineari: infatti esse ne sono un caso particolare (quindi non sono più potenti); inoltre ogni produzione del tipo A ----xBy può essere trasformata nella coppia A -----> x A1, A1 ---> by, con A1 simbolo nuovo.

c. La grammatica lineare S ---->aSb | ab genera il linguaggio a^nb^n che non è regolare. Quindi le grammatiche lineari e le lineari a destra o a sinistra sono più potenti di quelle lineari solo a sinistra o solo a destra.

e. Le grammatiche lineari sono un caso particolare di quelle non contestuali. Tuttavia esse non possono generare linguaggi come $\{a^nb^nc^md^m\}$. Questo fatto però, pur avendo una certa evidenza intuitiva non è di facile dimostrazione in termini rigorosi. Di conseguenza esse sono anche strettamente meno potenti degli automa a pila *nondeterministici*.

f. La seguente G lineare

S ---> aAb | aBbb

A ---> aAb | ab

B ---> aBbb | abb

invece genera il linguaggio $\{a^nb^n\} \cup \{a^nb^{2n}\}$ notoriamente nondeterministico. Siccome il precedente linguaggio $\{a^nb^nc^md^m\}$ è invece deterministico, se ne deduce che le potenze delle grammatiche lineari e degli automi a pila deterministici non sono confrontabili.

g. E' noto che le PN senza archi inibitori, usate come riconoscitori di linguaggi hanno una potenza non comparabile con quella delle grammatiche non contestuali: accettano ad esempio $\{a^nb^nc^n\}$ ma non sono in grado di riconoscere $\{wcw^R\}$. Siccome quest'ultimo linguaggio è facilmente generabile mediante una G lineare, se ne conclude che le PN non sono comparabili neanche con le G lineari.

Soluzione dell'esercizio 2

Risolviamo l'esercizio imponendo che ogni regina occupi esattamente una posizione sulla scacchiera, ogni riga e ogni colonna contengano al più una regina e che non ci siano due regine sulla stessa diagonale.
In questa prima soluzione utilizziamo un predicato ternario $p(N, X, Y)$ che indica che la regina numero N si trova alla colonna X e alla riga Y della scacchiera

$\forall n(1 \leq n \wedge n \leq 8 \rightarrow \exists x \exists y(p(n,x,y) \wedge 1 \leq x \wedge x \leq 8 \wedge 1 \leq y \wedge y \leq 8)$
(almeno una posizione sulla scacchiera per la regina n)

$\wedge$

$\forall n \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2\ (p(n,x_1,y_1) \wedge p(n,x_2,y_2) \rightarrow x_1=x_2 \wedge y_1=y_2)$
(al più una posizione sulla scacchiera per la regina n)

$\wedge$

$\forall x \forall n_1 \forall n_2 \forall y_1 \forall y_2\ (p(n_1,x,y_1) \wedge p(n_2,x,y_2) \rightarrow n_1=n_2 \wedge y_1=y_2)$
(al più una regina in colonna x)

$\wedge$

$\forall y \forall n_1 \forall n_2 \forall x_1 \forall x_2\ (p(n_1,x_1,y) \wedge p(n_2,x_2,y) \rightarrow n_1=n_2 \wedge x_1=x_2)$
(al più una regina in riga y)

$\wedge$

$\forall n_1 \forall n_2 \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2\ (p(n_1,x_1,y_1) \wedge p(n_2,x_2,y_2) \wedge n_1 \neq n_2 \rightarrow x_1+y_2 \neq x_2+y_1)$
(due regine diverse non sono mai sulla stessa diagonale NW-SE)

$\wedge$

$\forall n_1 \forall n_2 \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2\ (p(n_1,x_1,y_1) \wedge p(n_2,x_2,y_2) \wedge n_1 \neq n_2 \rightarrow x_1+y_1 \neq x_2+y_2)$
(due regine diverse non sono mai sulla stessa diagonale NE-SW)

Soluzione alternativa che fa uso di un predicato binario $p(X,Y)$ che indica che c'è una regina in colonna X e riga Y.

$\forall x(1 \leq x \wedge x \leq 8 \rightarrow \exists y(p(x,y) \wedge 1 \leq y \wedge y \leq 8)$ *(almeno una regina in colonna x)*

$\wedge$

$\forall x \forall y_1 \forall y_2\ (p(x,y_1) \wedge p(x,y_2) \rightarrow y_1=y_2)$ *(al più una regina in colonna x)*

$\wedge$

$\forall y(1 \leq y \wedge y \leq 8 \rightarrow \exists x(p(x,y) \wedge 1 \leq x \wedge x \leq 8)$ *(almeno una regina in riga y)*

$\wedge$

$\forall y \forall x_1 \forall x_2\ (p(x_1,y) \wedge p(x_2,y) \rightarrow x_1=x_2)$ *(al più una regina in riga y)*

$\wedge$

$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2\ (p(x_1,y_1) \wedge p(x_2,y_2) \wedge (x_1 \neq x_2 \vee y_1 \neq y_2) \rightarrow x_1+y_2 \neq x_2+y_1)$
(due regine diverse non sono mai sulla stessa diagonale NW-SE)

$\wedge$

$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2\ (p(x_1,y_1) \wedge p(x_2,y_2) \wedge (x_1 \neq x_2 \vee y_1 \neq y_2) \rightarrow x_1+y_1 \neq x_2+y_2)$
(due regine diverse non sono mai sulla stessa diagonale NE-SW)