Informatica Teorica

I prova in itinere del 6 Maggio 2009

Il tempo a disposizione è di 1h20

Esercizio 1 (9/13 punti)

Si consideri la seguente variante di automa a pila, detto A*utoma a Pila Osservabile* (APO). L'automa è dotato di una pila con due testine. La prima testina si comporta esattamente come nel caso degli automi a pila standard: la lettura di un simbolo lo cancella dalla pila (*pop*); la scrittura permette di impilare una stringa (*push*). La seconda testina permette esclusivamente la *lettura* di un simbolo, e non è vincolata dalla politica LIFO della pila: ad ogni mossa l'automa può spostare la testina verso l'alto (comando U), verso il basso (comando D), oppure tenerla ferma (comando S).
Inizialmente la pila contiene il simbolo speciale Z_0 ed entrambe le testine sono ivi posizionate. Ogni transizione dipende dal valore in cima alla pila e dal valore in corrispondenza della testina in sola lettura.
Si noti che se la testina in lettura punta all'elemento in cima alla pila e l'operazione di pop non è seguita da una push, l'unica comando ammissibile per la testina è D.

1. Si formalizzi l'automa a pila osservabile (si scelga se in versione deterministica o nondeterministica), nonché le regole di funzionamento e di riconoscimento di stringhe (mediante le usuali nozioni di configurazione, transizione, accettazione, ecc.), considerando le ε-mosse.
2. Si confronti la potenza riconoscitiva degli APO con gli altri tipi di automi.

Esercizio 2 (6/13 punti)

Sia L un linguaggio di alfabeto {a, x, y, z} tale che una stinga *w* appartiene a L se e solo se valgono le seguenti condizioni:

1. se *w* inizia con una sola *a,* allora finisce per *z* e non contiene la sottostringa *yxy*;
2. se *w* non inizia per *a*, non c'è nessuna *x* in posizione *i* tale che *i* mod 3 = 1.

Si scriva l'automa di potenza minima in grado di riconoscere L e una grammatica che generi L.

Soluzioni

Esercizio 1

1. Un APO deterministico è una $(Q, I, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ dove Q, I, O, q_0, Z_0 e F hanno lo stesso significato che negli automi a pila tradizionali. La funzione di transizione δ: $Q \times I \cup \{\varepsilon\} \times \Gamma \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^* \times M$, dove $M = \{U, S, D\}$, definisce, per ogni (q, i, γ, φ) , cioè stato corrente, carattere in input (oppure ε), simbolo in cima alla pila (letto mediante una pop) e simbolo a cui punta la testina aggiuntiva, lo stato prossimo q', la stringa di simboli, eventualmente vuota, che viene scritta in cima alla pila e lo spostamento della testina aggiuntiva. Affinchè sia deterministico si richiede che se $\delta(q, \varepsilon, A, B)$ è definito, allora $\delta(q,i, A, B)$ è indefinito per tutti gli $i \in I$.

Una configurazione di APO è una tupla $<q, x, \alpha\uparrow A\beta>$ con $q\in Q$, $x\in I^*$, $\alpha, \beta\in \Gamma^*$, $A\in \Gamma$, dove q è lo stato dell'organo di controllo, x è la stringa in ingresso ancora da leggere, $\alpha\uparrow A\beta$ rappresenta il contenuto della pila e in particolare il simbolo $\uparrow$ rappresenta la posizione della seconda testina (che punta al carattere successivo).

La configurazione inziale dell'APO è $< q_0, x, \uparrow Z_0>$, dove x è la stringa in ingresso.
La relazione di transizione |- tra due configurazioni c e c' è definita nel modo seguente.
Sia $c = <q, x, \alpha\uparrow A\beta>$, sia $c'= <q', x', \alpha'\uparrow A'\beta'>$, con $x = ix'$ e sia $\delta(q, i, A, B) = < q', \gamma', M >$.

c |- c' sse:

- Se $M = D$, allora $\alpha = \alpha'' C$, con $C \in \Gamma$ $\alpha'' \in \Gamma^*$ e:
    - $\alpha' =\alpha''$, $A'=C$;
    - $A\beta = \beta''B$, con $\beta'' \in \Gamma^*$, e $\beta' = \beta''\gamma'$.
- Se $M = S$, allora $\alpha' = \alpha$ e:
    - Se $\beta \in \Gamma^+$, $A'= A$ e $\beta = \beta''B$, con $\beta'' \in \Gamma^*$, e $\beta' = \beta''\gamma'$.
    - Se $\beta = \varepsilon$, allora $B=A$ e $\gamma'\in \Gamma^+$, e inoltre $A'\beta' = \gamma'$.
- Se $M = U$, allora $\alpha' = \alpha A$ e:
    - Se $\beta = \varepsilon$, allora $B=A$ e $\gamma' = C \gamma''$, con $C \in \Gamma$ e $\gamma'' \in \Gamma^+$, e inoltre:
        - $A'\beta' = \gamma''$;
        - $\alpha'= \alpha C$
    - Se $\beta = B$, allora $\gamma' = A'\beta'$.

Per le ε-mosse sulla stringa in ingresso la formalizzazione è identica; in tal caso, $x = x'$ e $\delta(q, \varepsilon, A, B) = < q', \gamma', M >$. Le altre condizioni sono identiche.

Una stringa $x \in I^*$ è accettata da un APO se e solo se:
$< q_0, x, \uparrow Z_0>$ |-* $< q, \varepsilon, \alpha\uparrow A\beta>$ per qualche $q \in F$ e $\alpha, \beta \in \Gamma^*$, $A \in \Gamma$.

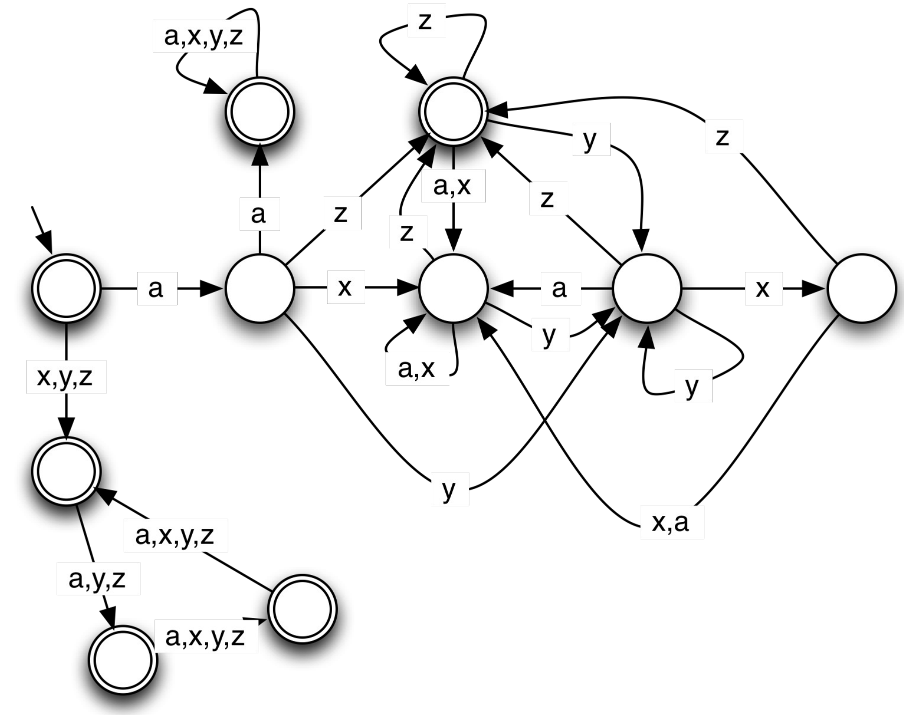
2. Gli APO hanno la stessa potenza riconoscitiva delle macchine di Turing. Infatti, tramite un APO è possibile simulare facilmente un automa a coda (che è noto essere equivalente ad una macchina di Turing). Intuitivamente, un APO simula un automa a coda nel seguente modo. Si usa la testina di lettura per simulare la lettura della testa della coda.
Per esempio, una transizione di configurazione dell'automa a coda del tipo:
$c = <q, x, \alpha>$ |- $<q', x', \alpha'>$, con $x = ix'$, $\alpha=A\beta$ e $\alpha'=\beta\gamma$ con $\delta(q, i, A) = < q', \gamma >$
si simula progettando opportunamente gli stati dell'organo di controllo e con una transizione δ nell'APO del tipo:

$\delta(q, i, C, A) = < q', \gamma, M >$, per ogni $C \in \Gamma$.

con $M = U$ se $\beta \in \Gamma^+$, $M = S$ se $\beta = \varepsilon$.

Esercizio 2

Un automa che riconosce LR è il seguente



Una grammatica che genera LR è:

S→ε | aaQ | aAz | xL | yL | zL

Q→ε | aQ | xQ | yQ | wQ

A→ε | xW | zW | yY
W→ε | aW | xW | zW | yY
Y→ε | yY | aW | zW | xX
X→ε | aW | xW | zW

L→ ε |aM | yM | zM
M→ ε |aN | xN | yN | zN
N → ε |aL | xL | yL | zL