

Informatica Teorica

PRIMO COMPITINO – 26 APRILE 2004

Si consideri il linguaggio L definito sull'alfabeto $\{a,b,c\}$ e consistente di tutte e sole le stringhe appartenenti ad $\{a,b,c\}^*$ contenenti almeno un b e terminanti con 5 c consecutive.

Esercizio 1 (punti 3/15)

Si fornisca una formula del prim'ordine che caratterizzi tutte e sole le stringhe di L .

Esercizio 2 (punti 3/15)

Si descriva una macchina astratta che riconosca L . Si preferisce una macchina a "potenza minima" ovvero scelta tra la famiglia di automi meno potente tra quelli in grado di riconoscere L .

Esercizio 3 (punti 4/15)

Si costruisca una grammatica G che generi L . In questo caso si preferisce una grammatica con numero minimo di produzioni sintattiche, indipendentemente dalla classe di appartenenza e dal vocabolario nonterminale.

Esercizio 4.a (punti 5/15)

Si definisca in modo formale un automa a due code, informalmente descritto come segue:

L'automata agisce come riconoscitore di linguaggio operando su stringhe memorizzate su un unico nastro di ingresso; è dotato di un organo di controllo a stati finiti e di due ulteriori organi di memoria gestiti secondo la disciplina FIFO (code). Ogni mossa dell'automata consiste nei seguenti passi:

- lettura del carattere in ingresso, oppure mancata lettura senza spostamento della testina (ϵ -mossa)
 - lettura del carattere sul fronte di ognuna delle due code
 - lettura dello stato dell'organo di controllo
- (Sulla base dei dati acquisiti con le precedenti letture):
- cambiamento dello stato dell'organo di controllo
 - eventuale spostamento a destra della testina del nastro di ingresso (se non si tratta di ϵ -mossa)
 - rimozione del carattere sul fronte di ognuna delle due code
 - scrittura di una stringa in fondo a ognuna delle due code

Si definisca poi la configurazione di un tale automa, la relazione di transizione tra configurazioni che formalizza la mossa dell'automata e l'accettazione della stringa di ingresso mediante il posizionamento su uno stato di accettazione quando l'automata giunge a fine stringa di ingresso.

Esercizio 4.b (punti 3/15)

Si mostri come un automa a coda singola, definito in modo del tutto analogo al precedente ma dotato di una sola coda, possa simulare il comportamento di un automa a coda doppia; in altre parole, si mostri come, dato un automa a coda doppia se ne possa costruire uno a coda singola che riconosce lo stesso linguaggio. Non è necessario formalizzare anche l'automata a coda singola: basta descrivere in maniera succinta ma precisa il comportamento del medesimo per simulare quello dell'automata a coda doppia.

NB

I punteggi sono espressi in 15esimi. Il punteggio complessivo ottenuto sarà sommato a quello del secondo compitino, pure espresso in 15esimi. Il massimo punteggio raggiungibile sarà perciò espresso in 30esimi ma sarà superiore a 30/30. Esso, produrrà, con eventuali piccoli aggiustamenti, il voto finale proposto.

Si consiglia di svolgere gli esercizi nell'ordine proposto, riservando la – eventuale – soluzione dell'Esercizio 4.b ad un'ultima fase, solo a valle di una ben meditata soluzione degli esercizi precedenti.

Soluzioni

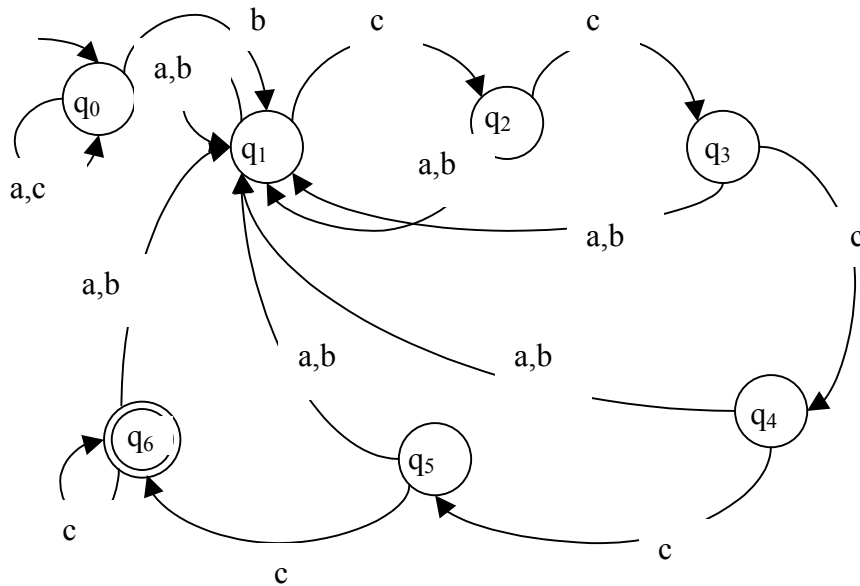
Esercizio 1 (con leggere “abbreviazioni” rispetto alla pura sintassi del prim’ordine)

$$x \in L \leftrightarrow x \in \{a,b,c\}^* \wedge (\exists y, z ((x = y.b.z.cccccc) \wedge (y, z \in \{a,b,c\}^*)))$$

Si omette in quanto ben nota la formula che formalizza l’appartenenza $x, y, z \in \{a,b,c\}^*$.

Esercizio 2

Il linguaggio L è riconosciuto dal seguente automa a stati finiti (deterministico):



Esercizio 3

Essendo L riconosciuto da un automa a stati finiti, esiste sicuramente una grammatica regolare che genera L. Tuttavia la seguente grammatica ha un minor numero di produzioni di una regolare.

$$S \rightarrow AbAccccc$$

$$A \rightarrow AA \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon$$

Esercizio 4.a

Seguendo uno schema tradizionale già adottato per la formalizzazione di altre macchine astratte, l'automa a doppia coda può essere formalizzato nel modo seguente:

ADC: $\langle Q, I, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$, dove i simboli usati hanno lo stesso significato di altri automi.

$\delta: (Q \times (I \cup \varepsilon) \times \Gamma \times \Gamma) \rightarrow (Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*)$ è la funzione di transizione (δ deve essere soggetta a restrizione analoga a quella adottata per gli automi a pila se si vuole che l'automa ADC sia deterministico).

Una configurazione c di un ADC è definita come:

$$c = \langle q, x, \gamma_1, \gamma_2 \rangle, q \in Q, x \in \Gamma^*, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*$$

La relazione di transizione tra configurazioni è definita nel modo seguente:

$$c_1 = \langle q_1, x_1, \gamma_{1_1}, \gamma_{1_2} \rangle \vdash c_2 = \langle q_2, x_2, \gamma_{2_1}, \gamma_{2_2} \rangle \text{ se e solo se}$$

$$x_1 = x_2, \gamma_{1_1} = A\eta_1, \gamma_{2_1} = \eta_1\lambda_{2_1}, \gamma_{1_2} = B\eta_2, \gamma_{2_2} = \eta_2\lambda_{2_2},$$

$$\text{e } \delta(q_1, \varepsilon, A, B) = \langle q_2, \lambda_{2_1}, \lambda_{2_2} \rangle;$$

oppure

$$x_1 = i.x_2, \gamma_{1_1} = A\eta_1, \gamma_{2_1} = \eta_1\lambda_{2_1}, \gamma_{1_2} = B\eta_2, \gamma_{2_2} = \eta_2\lambda_{2_2},$$

$$\text{e } \delta(q_1, i, A, B) = \langle q_2, \lambda_{2_1}, \lambda_{2_2} \rangle$$

Infine la stringa x è accettata da ADC se e solo se $c_0 = \langle q_0, x, Z_0, Z_0 \rangle \vdash^* c = \langle q, \varepsilon, \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ con $q \in F$.

Esercizio 4.b

A grandi linee un ACS (automa a coda singola) può simulare un ADC nel modo seguente:

La coda di ACS contiene, all'inizio e alla fine di una "macro-mossa" che simula una singola mossa di ADC una stringa $\gamma_1\$ \gamma_2$ dove, al solito, $\$$ è un simbolo speciale usato come separatore e γ_1 e γ_2 i contenuti delle due code di ADC.

La macro-mossa di ACS consiste in:

- lettura e memorizzazione mediante memoria a stati finiti del primo carattere di γ_1 ;
- scorrimento e ricopiatura della parte restante di γ_1 in fondo alla coda, separata da un $\$$ dalla parte precedente;
- lettura e memorizzazione mediante memoria a stati finiti del primo carattere di γ_2 (subito dopo il $\$$);

[a questo punto ACS è in possesso (nella sua memoria a stati finiti) di tutte le informazioni necessarie per simulare la mossa di ADC];

- scorrimento e ricopiatura della parte restante di γ_2 in fondo alla coda, separata da un $\$$ dalla parte precedente;
- scorrimento e ricopiatura della parte restante di γ_1 in fondo alla coda, separata da un $\$$ dalla parte precedente e seguita dalla stringa λ_1 , definita dalla δ di ADC;
- scorrimento e ricopiatura della parte restante di γ_2 in fondo alla coda, separata da un $\$$ dalla parte precedente e seguita dalla stringa λ_2 , definita dalla δ di ADC;
- cancellazione del $\$$ rimanente sul fronte della coda;
- eventuale avanzamento della testina di lettura;
- cambio dello stato $q_1 \rightarrow q_2$ simulato di ADC.