Informatica Teorica

Seconda prova in itinere – 5 Luglio 2006, Sezione Pradella

Attenzione: avvisi sul retro!

Il problema della Torre di Hanoi è così definito. Vi sono n dischi simili ma di dimensioni diverse inseriti in un piolo, in modo tale che il disco più grande sia nel punto più basso e tutti gli altri siano sopra di esso in ordine decrescente. Esistono altri due pioli inizialmente liberi (si veda la Figura (a)).

Si vogliono trasportare tutti i dischi su un altro piolo, spostandoli uno alla volta da un piolo all'altro, e operando in modo tale che mai un disco sia appoggiato sopra uno più piccolo (ovviamente, per spostare un disco da un piolo all'altro occorre aver rimosso quelli sovrastanti, sempre rispettando le regole precedenti). Le Figure (b) e (c) completano l'illustrazione del problema.

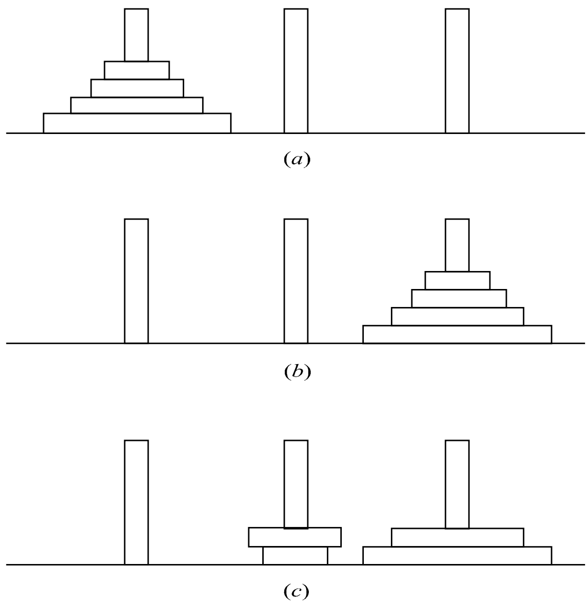

Figure (a), (b), (c) Il problema della torre di Hanoi: (a) situazione iniziale, (b) situazione finale richiesta, (c) situazione inammissibile.

Esercizio 1 (punti 8/17-esimi)

Si formalizzi mediante formule del prim'ordine una generica situazione ammissibile della posizione dei dischi nei pioli: ad esempio le figure (a) e (b) rappresentano due situazioni ammissibili al contrario della figura (c).

Esercizio 1.bis(da svolgere *facoltativamente* solo dopo aver svolto tutti gli altri esercizi. L'esercizio vale ulteriori punti 3/17-esimi)

Si formalizzi, sempre mediante formule del prim'ordine, la relazione che deve sussistere tra due diverse situazioni ammissibili perché l'una sia ottenibile dall'altra mediante una mossa lecita.

Esercizio 2 (punti 4/17-esimi)

Si dica se il seguente problema è decidibile: Dato un algoritmo A qualsiasi, stabilire se A risolve correttamente il problema della Torre di Hanoi. Giustificare brevemente la risposta.

Esercizio 3 (punti 5/17-esimi)

Dovendo valutare la complessità di un algoritmo per la soluzione del problema della Torre di Hanoi da eseguire mediante un normale calcolatore basato sulla classica architettura di von Neumann (macchina RAM), quale criterio di costo risulterebbe più adeguato e conveniente? Giustificare brevemente la risposta.

Esercizio 3bis, facoltativo (ulteriori punti 2/17-esimi)

Che relazione è "naturale" aspettarsi tra complessità (sia spaziale che temporale) di un algoritmo per la soluzione del problema, valutata a criterio costante e a criterio logaritmico? **NB**. Non si chiede di descrivere un algoritmo né di valutarne le complessità; bensì di stabilire come cambia la valutazione di complessità cambiando il criterio di costo.

Avvisi importanti

1.

Il tempo disponibile per lo svolgimento della prova è 1 ora e 30 minuti.

2.

L'eventuale soluzione dell'**Esercizio 1.bis** sarà presa in considerazione e valutata **solo se tutti gli altri esercizi** saranno stati risolti in maniera ritenuta **soddisfacente**.

3.

Si ricorda che possono svolgere questa prova in itinere solo coloro che abbiano ottenuto almeno 5 punti nella prima prova.

Eccezionalmente sono ammessi anche gli studenti laureandi, **che devono indicare esplicitamente la loro situazione nella testata del loro elaborato**. Come già comunicato, in caso di esito positivo nella presente prova, verranno loro comunicate le modalità di recupero della prima prova.

4.

Come in altre occasioni i risultati e le successive comunicazioni (in particolare le modalità di accettazione/rifiuto del voto proposto) saranno pubblicati nella pagina personale di Matteo Pradella sul sito ufficiale del Dipartimento. Verrà data precedenza alla correzione dei compiti dei laureandi (che risultino tali dall'archivio ufficiale del CEDA)

Soluzioni

Esercizio 1

Si indichi

- con D_i l'i-esimo disco: $1 <= i <= n$;
- con $dim(D_i)$ la dimensione del disco i-esimo;
  $(\forall i ((1 <= i <= n) \rightarrow (1 <= dim(D_i) <= n))) \wedge$
  $(\forall i,j (((1 <= i, j <= n) \wedge (i \neq j)) \rightarrow (dim(D_i) \neq dim(D_j))))$
- con $pos(D_i)$ la posizione del disco i-esimo:
  $pos(D_i) = <h,p>$; $1 <= h <= n$; $1 <= p <= 3$; che indica che il disco si trova ad altezza h nel piolo p.
- la funzione pos deve sottostare ai seguenti vincoli:
  - $\forall i,j (pos(D_i) = pos(D_j) \rightarrow D_i = D_j)$

    $\wedge$
  - $\forall i,h, k, p ((pos(D_i) = <h,p> \wedge k < h) \rightarrow \exists j (pos(D_j) = <k,p>))$

    $\wedge$
  - $\forall i,j, h, k, p ((pos(D_i) = <h,p> \wedge pos(D_j) = <k,p> \wedge k < h) \rightarrow (dim(D_j) > dim(D_i)))$

Esercizio 1.Bis

Si indichino con pos1 e pos2, rispettivamente, due funzioni che definiscono la posizione del disco i-esimo prima e dopo l'esecuzione di una mossa. Ovviamente sia pos1 che pos2 devono soggiacere ai vincoli formalizzati precedentemente. Inoltre esse soddisfare la relazione espressa dalle formule seguenti:

- Se un disco qualsiasi non si trova in cima a un piolo, la sua posizione rimane invariata nel passaggio da pos1 a pos2:

  $\forall i,h, p ((pos1(D_i) = <h,p> \wedge \exists k, j (k > h \wedge pos1(D_j) = <k,p>)) \rightarrow (pos2(D_i) = <h,p>))$
- **Se** (per ogni tripla di dischi D_{i1}, D_{i2}, D_{i3} e posizioni):

  $\forall i1,i2, i3, h1, h2, h3, p1, p2, p3$
  - il disco D_{i1} si trova in cima al piolo p1:

    $((pos1(D_{i1}) = <h1,p1> \wedge \neg\exists k, j (k > h1 \wedge pos1(D_j) = <k,p1>))$
  - **e** il disco D_{i2} si trova in cima al piolo p2:

    $\wedge (pos1(D_{i2}) = <h2,p2> \wedge \neg\exists k, j (k > h2 \wedge pos1(D_j) = <k,p2>))$
  - **e** il disco D_{i3} si trova in cima al piolo p3:

    $\wedge (pos1(D_{i3}) = <h3,p3> \wedge \neg\exists k, j (k > h3 \wedge pos1(D_j) = <k,p3>))$
  - **e** i tre dischi Di1 sono diversi tra loro, e stanno sui tre pioli diversi

    $\wedge (i1 \neq i2 \wedge i2 \neq i3 \wedge i1 \neq i3 \wedge p1 \neq p2 \wedge p2 \neq p3 \wedge p1 \neq p3))$
- **allora**:

  $\rightarrow$
  - uno (e uno solo) tra Di1, Di2, e Di3 cambia piolo in pos2 (e, necessariamente per i vincoli su pos, viene a trovarsi in cima al nuovo piolo)

    $\exists h, p ((pos2(D_{i1}) = <h,p> \wedge p \neq p1 \wedge pos2(D_{i2}) = pos1(D_{i2}) \wedge pos2(D_{i3}) = pos1(D_{i3}))$

    $\vee (pos2(D_{i2}) = <h,p> \wedge p \neq p2 \wedge pos2(D_{i1}) = pos1(D_{i1}) \wedge pos2(D_{i3}) = pos1(D_{i3}))$

    $\vee (pos2(D_{i3}) = <h,p> \wedge p \neq p3 \wedge pos2(D_{i1}) = pos1(D_{i1}) \wedge pos2(D_{i2}) = pos1(D_{i2})))$

Soluzione alternativa

Definiamo che la differenza tra pos1 e pos2 riguarda un solo disco, che deve essere in cima ad un piolo in pos1 (e che sarà in cima ad un piolo in pos2 per i vincoli sui pioli):

$\exists\, D_i, h, p\ (\ pos1(D_i) = \langle h,p\rangle \wedge pos2(D_i) \neq \langle h,p\rangle \wedge$ /* D_i cambia posizione */
$\quad \neg\exists\, j\ (pos1(D_j) = \langle h+1,p\rangle) \wedge$ /* D_i è in cima ad un piolo in pos1 */
$\quad \forall j\ (\ j \neq i \rightarrow pos1(D_j) = pos2(D_j)\ )$ /* tutti gli altri dischi rimangono fermi */
$)$

Si noti che potremmo semplificare la condizione eliminando il vincolo che D_i in pos1 sia in cima ad un piolo, in quanto ciò è garantito dal fatto che in pos2 non ci possono essere "buchi", e dal fatto che l'unico disco ad essere spostato è D_i:

$\exists\, D_i, h, p\ (\ pos1(D_i) = \langle h,p\rangle \wedge pos2(D_i) \neq \langle h,p\rangle \wedge$ /* D_i cambia posizione */
$\quad \forall j\ (\ j \neq i \rightarrow pos1(D_j) = pos2(D_j)\ )$ /* tutti gli altri dischi rimangono fermi */
$)$

Se invece volessimo specificare, per maggiore chiarezza, che nella nuova posizione D_i deve essere in cima ad un piolo, potremmo modificare la condizione come segue:

$\exists\, D_i, h, p\ (\ pos1(D_i) = \langle h,p\rangle \wedge pos2(D_i) \neq \langle h,p\rangle \wedge$ /* D_i cambia posizione */
$\quad \neg\exists\, j\ (pos1(D_j) = \langle h+1,p\rangle) \wedge$ /* D_i è in cima ad un piolo in pos1 */
$\quad \forall h', p'\ (\ pos1(D_i) = \langle h',p'\rangle)$
$\qquad \rightarrow$
$\qquad \neg\exists\, j\ (pos2(D_j) = \langle h'+1,p'\rangle)\ ) \wedge$ /* D_i è in cima ad un piolo anche in pos2 */
$\quad \forall j\ (\ j \neq i \rightarrow pos1(D_j) = pos2(D_j)\ )$ /* tutti gli altri dischi rimangono fermi */
$)$

*Le due seguenti **ulteriori soluzioni alternative** descrivono in maniera completa non solo i vincoli sul posizionamento dei dischi nei pioli e sul loro movimento, ma anche l'obiettivo del gioco.*

Esercizio 1 + 1.Bis, alio modo

Si introduca la seguente funzione:

- piolo(p, h, t) = d se e solo se *d* è la dimensione del disco che si trova ad altezza *h* sul piolo *p* al tempo *t*

Una possibile formalizzazione del problema della Torre di Hanoi è la seguente (con implicite quantificazioni universali esterne):

- vincoli sui domini:
  $piolo(p, h, t) = d \rightarrow 1 \leq p \leq 3 \wedge 1 \leq h \leq n \wedge 1 \leq d \leq n$
- unicità del disco:
  $piolo(p_1, h_1, t) = piolo(p_2, h_2, t) \rightarrow p_1 = p_2 \wedge h_1 = h_2$
- assenza di "buchi" sul piolo:
  $piolo(p, h, t) = d \wedge h > 1 \rightarrow \exists d_1(piolo(p, h\text{-}1, t) = d_1)$
- vincolo sull'ordinamento dei dischi sul piolo:
  $piolo(p, h_1, t) > piolo(p, h_2, t) \rightarrow h_1 < h_2$

Si introducano poi i seguenti predicati e funzioni:

- altezza(p, t) = h se e solo se *h* è l'altezza del piolo *p* al tempo *t*
- muovi(p_1, p_2, t) se e solo se all'istante t il disco che si trova in cima al piolo p_1 è spostato in cima al piolo p_2

Una possibile formalizzazione dell'evoluzione del gioco della Torre di Hanoi è la seguente (con implicite quantificazioni universali esterne):

- definizione della funzione "altezza", che deriva da "piolo":
  $$altezza(p, t) = h \leftrightarrow \quad (h > 0 \wedge \exists d(piolo(p, h, t) = d) \wedge \neg\exists d(piolo(p, h+1, t) = d)) \vee$$
  $$(h = 0 \wedge \neg\exists d(piolo(p, 1, t) = d)))$$
- una è mossa possibile solo se il piolo di partenza non è vuoto e se il piolo di arrivo è diverso da quello di partenza:
  $muovi(p_1, p_2, t) \rightarrow altezza(p_1, t) > 0 \wedge p_1 \neq p_2$
- non è possibile effettuare 2 mosse contemporaneamente:
  $muovi(p_1, p_2, t) \wedge muovi(p_3, p_4, t) \rightarrow p_1 = p_3 \wedge p_2 = p_4$
- effetto di una mossa sullo stato di un piolo:
  $$\begin{aligned} piolo(p, h, t) = d \leftrightarrow \quad & (p = 1 \wedge h = n - d +1 \wedge \neg\exists t_1, p_1, p_2(t_1 < t \wedge muovi(p_1, p_2, t_1))) \\ & \vee \\ & \exists t_1\ (t_1 < t \wedge altezza(p, t_1) = h\text{-}1 \wedge \\ & \quad \exists p_1(\ muovi(p_1, p, t_1) \wedge \\ & \quad\quad piolo(p_1, altezza(p_1, t_1), t_1) = d \wedge \\ & \quad\quad \forall t_2\ (t1 < t2 < t \wedge altezza(p, t_2) = h \\ & \quad\quad\quad \rightarrow \\ & \quad\quad\quad \neg\exists p_1\ (muovi(p, p_1, t_2))\ ))) \end{aligned}$$
- stato iniziale del gioco:
  $\forall i(1 \leq i \leq n \rightarrow piolo(1, i, 0) = n - i + 1) \wedge altezza(2, 0) = 0 \wedge altezza(3, 0) = 0$
  - si noti che la seconda e terza condizione sono superflue, in quanto se tutti i dischi sono sul primo piolo, sugli altri non ci può essere nulla
- stato finale del gioco:
  $\exists t\ (\forall i(1 \leq i \leq n \rightarrow piolo(3, i, t) = n - i + 1) \wedge altezza(1, t) = 0 \wedge altezza(2, t) = 0)$

Esercizio 1 + 1.Bis, yet another

Insiemi: D = {1,2,..,n} dischi; P = {1,2,3} pioli; tempo N.

Variabili: $t \in N$; $d,d',d'' \in D$; $p,p',p'' \in P$.

Predicati:

piolo(p,d,t): il disco d è sul piolo p al tempo t

mossa(p,p',t): si muove dal piolo p a p' al tempo t

on(d,d',t): il disco d è immediatamente sopra d' al tempo t (serve solo per descrivere la situazione iniziale)

Formule:

unicità dischi su pioli:

$\text{piolo}(p,d,t) \rightarrow \neg\exists p' \, (p' \neq p \wedge \text{piolo}(p',d,t))$

definizione di disco più in alto:

$\text{top}(p,d,t) \leftrightarrow$

$(\text{piolo}(p,d,t) \wedge \neg\exists d' \, (d' < d \wedge \text{piolo}(p,d',t))$

$\vee$

$d = n+1 \wedge \neg\exists d' \, \text{piolo}(p,d',t))$

situazione iniziale:

$\text{init}(t) \leftrightarrow$

$(1 =< d < n \rightarrow \text{on}(d,d+1,t)) \wedge$

$(\text{on}(d,d',t) \rightarrow \text{piolo}(1,d,t) \wedge \text{piolo}(1,d,t'))$

situazione finale:

$\text{end}(t) \leftrightarrow \forall d \, \text{piolo}(3,d,t)$

mossa:

$\text{mossa}(p,p',t) \leftrightarrow$

$\text{top}(p,d,t) \wedge \text{top}(p',d',t) \wedge d' > d \wedge$

$\text{piolo}(p',d,t+1) \wedge$

$\forall d'',p'' \, (d'' \neq d \wedge \text{piolo}(p'',d'',t) \rightarrow \text{piolo}(p'',d'',t+1))$

partita:

$\text{init}(0) \wedge \forall t \, (\neg\text{end}(t) \rightarrow \exists p,p' \, \text{mossa}(p,p',t))$

Esercizio 2

Si tratta di un classico caso di applicazione del teorema di Rice. Infatti, il problema può essere visto come una specifica funzione (il cui valore, per una data configurazione iniziale, potrebbe essere la sequenza di mosse, se esiste, che porta alla desiderata configurazione finale). Tale funzione è ovviamente calcolabile. Quindi considerando l'insieme costituito esattamente da tale funzione, non è decidibile, in base al teorema di Rice, se un generico algoritmo calcola esattamente la funzione considerata.

Esercizi 3 e 3 bis

Ovviamente il criterio di costo logaritmico fornisce sempre la garanzia di risultati realistici. In questo caso, tuttavia esso risulterebbe superfluo e quindi inutilmente oneroso da applicare. Si osservi infatti che una quantità di memoria limitata linearmente dal numero n di dischi è sufficiente per rappresentare qualsiasi configurazione del sistema (ad esempio un array che indichi la posizione di ogni disco costerebbe Θ (n) a criterio di costo costante e Θ (n.log(n)) a criterio logaritmico). L'applicazione di ogni mossa richiederebbe perciò un tempo costante a criterio di costo costante e al più Θ (log(n)) a criterio di costo logaritmico. Ne consegue che qualsiasi sia la complessità T(n) di un algoritmo (ovviamente che non usi la memoria in modo scioccamente inefficiente) calcolata a criterio di costo costante, la corrispondente complessità calcolata a criterio di costo logaritmico sarebbe automaticamente Θ (T(n).log(n)).

Si noti tuttavia che la funzione T(n) invece sarà probabilmente di un ordine di grandezza molto elevato data la natura "a ricorsione fortemente nidificata" dei normali algoritmi per risolvere il problema.