

Informatica Teorica

Prima prova in itinere - 5 Maggio 2005

Esercizio 1 (5 punti)

Si consideri il linguaggio:

$L \subseteq \{a,b,c\}^*$ costituito dalle stringhe in cui il numero di a sia uguale al numero di b + 5 e il numero di c sia pari.

Si costruisca una macchina astratta che riconosca L. Tra le diverse macchine astratte che riconoscono L sono preferite macchine "a potenza minima" ossia appartenenti alla categoria di automi a minor potenza riconoscitiva possibile.

Esercizio 2 (4 punti)

E' noto che le due seguenti definizioni di grammatica regolare sono equivalenti, ossia generano la stessa classe di linguaggi:

- 1) $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P, |\alpha| = 1, \beta \in V_N \cdot V_T \cup V_T$
- 2) $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P, |\alpha| = 1, \beta \in V_T \cdot V_N \cup V_T$

La seguente ulteriore modifica della definizione è anch'essa equivalente alle precedenti?

- 3) $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P, |\alpha| = 1, \beta \in V_T \cdot V_N \cup V_T \cup V_N \cdot V_T$

Giustificare brevemente la risposta.

Esercizio 3 (5 punti)

Si definisca in maniera matematicamente precisa la seguente versione arricchita di automa a pila.

L'automa, oltre a tutte le caratteristiche dei normali automi a pila (nondeterministici), può anche, ad ogni mossa, esaminare il simbolo contenuto nel fondo della pila e sostituirlo con un altro simbolo.

Se ne formalizzino anche le regole di funzionamento (per esempio mediante le normali nozioni di configurazione e transizione tra configurazioni) e di riconoscimento di stringhe.

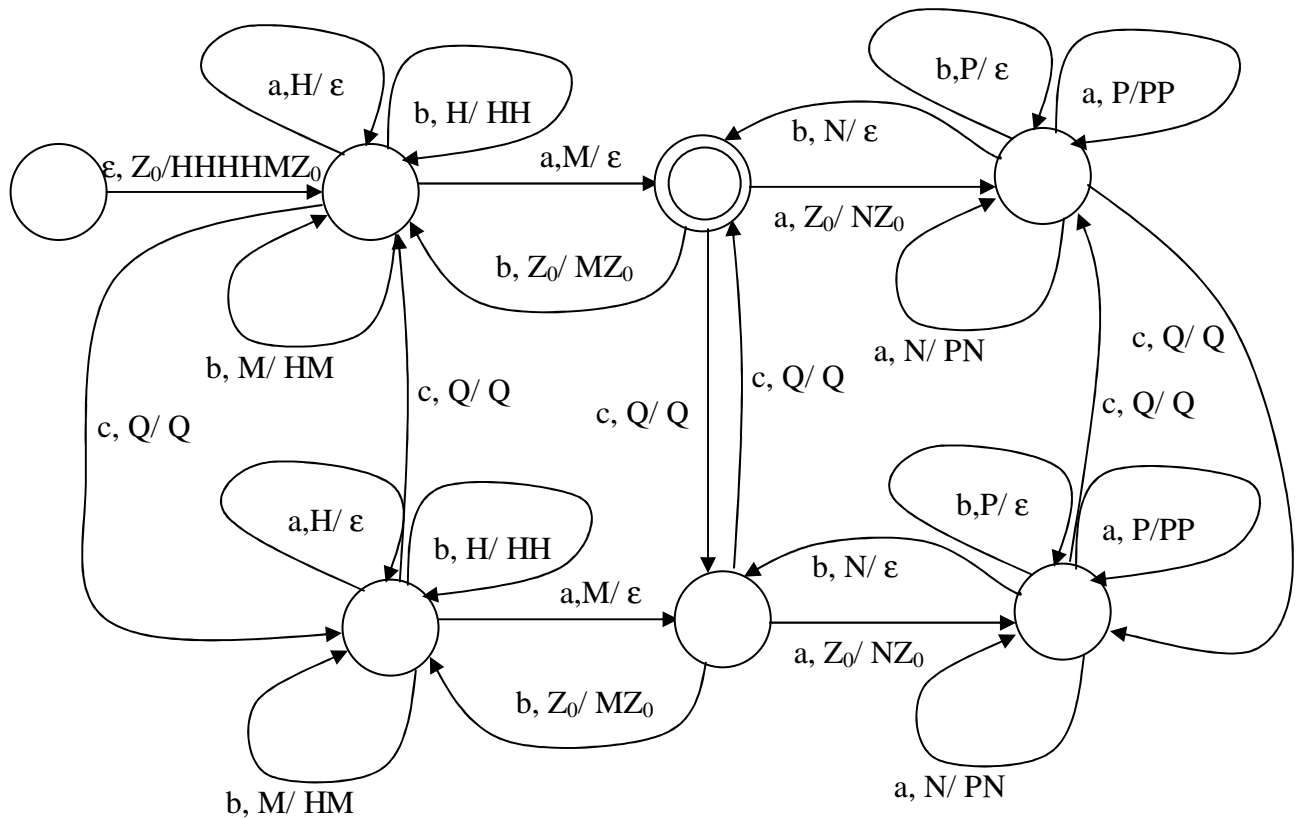
NB: nel caso la precedente definizione informale non risulti sufficientemente precisa in alcuni dettagli, si operano opportune scelte, spiegandone le ragioni, per giungere ad una formalizzazione precisa.

Si dica poi, giustificando brevemente la risposta, se l'automa, così arricchito aumenta la potenza riconoscitiva rispetto agli automi a pila tradizionali. In caso positivo, raggiunge la potenza delle macchine di Turing?

Soluzioni

Esercizio1

Il linguaggio L è riconosciuto dal seguente automa a pila deterministico:



Legenda: il simbolo Q indica un qualsiasi simbolo $\in \Gamma$

Evidentemente non è possibile riconoscere L con una macchina a stati finiti, a causa della necessità di conteggio illimitato sul numero di a e b.

Esercizio2

No

La grammatica seguente soddisfa la nuova definizione ma genera il linguaggio

$\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ che notoriamente non è regolare.

$S \rightarrow aA$

$A \rightarrow Sb \mid b$

Esercizio 3

Un automa riconoscitore nondeterministico a pila, che possa accedere e modificare anche il fondo della pila può essere formalizzato mediante una 7-pla

$$\langle Q, I, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$$

in cui tutti i simboli hanno lo stesso significato di quelli relativi agli automi a pila tradizionali, con l'unica differenza che la funzione δ viene estesa nel modo seguente:

$$\delta: Q \times (I \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma \rightarrow \wp_F(Q \times \Gamma^* \times \Gamma)$$

dove $\delta(q, i, A, B) = \{\langle q', \alpha, C \rangle\}$ significa che l'automata, trovandosi nello stato q , leggendo i dal nastro di ingresso (oppure ε nel caso di ε -mossa), A dalla cima della pila, B dal fondo della medesima, in maniera nondeterministica tra le diverse terne possibili, si porta in q' , scrive α sulla cima della pila al posto di A e C sul fondo al posto di B .

Una configurazione c dell'automata è una 3-pla $c = \langle q, x, \gamma \rangle$, come per l'automata a pila tradizionale; la relazione di transizione è, parzialmente, definita dalle regole seguenti

se $|\gamma| \geq 2$

$$\langle q, i, y, A\eta H \rangle \dashv\vdash \langle q', y, \alpha \eta M \rangle \text{ se e solo se } \langle q', \alpha, M \rangle \in \delta(q, i, A, H)$$

se $|\gamma| = 1$

$$\langle q, i, y, A \rangle \dashv\vdash \langle q', y, \alpha M \rangle \text{ se e solo se } \langle q', \alpha M, M \rangle \in \delta(q, i, A, A)$$

NB: se $\langle q', \alpha H, M \rangle \in \delta(q, i, A, A)$ con $H \neq M$, la transizione non è applicabile. Sono però possibili anche altre definizioni: ad esempio che la macchina dia priorità alla riscrittura sulla cima della pila rispetto a quella sul fondo; oppure che comunque la transizione sia possibile solo se il contenuto della pila contiene almeno due caratteri.

(la parte rimanente della definizione della relazione di transizione viene data per scontata).

Infine x è accettata dall'automata se e solo se

$$\langle q_0, x, Z_0 \rangle \dashv\vdash \langle q', \varepsilon, \gamma \rangle, \text{ per qualche } \gamma, \text{ con } q' \in F, \text{ come nel caso dell'automata a pila tradizionale.}$$

La potenza dell'automata non aumenta rispetto all'automata a pila tradizionale, poiché l'informazione aggiuntiva che esso può trattare è un'informazione finita (il simbolo in fondo alla pila) e può quindi essere memorizzata attraverso gli stati finiti dell'organo di controllo.