

# Informatica Teorica

Appello dell'11 Settembre 2007

## Avvisi importanti

- Il tempo disponibile per lo svolgimento della prova è 2 ore.
- Come in altre occasioni i risultati e le successive comunicazioni (in particolare le modalità di accettazione/rifiuto del voto proposto) saranno pubblicati nella pagina personale del docente sul sito ufficiale del Dipartimento.

## Esercizio 1 (punti 14)

Si consideri un modello di calcolo consistente in una Macchina di Turing a nastro singolo e dotata di  $h$  testine di lettura/scrittura.

1. Si formalizzi tale modello.  
NB, non è necessario formalizzarne il comportamento, ossia la relazione di transizione; è sufficiente formalizzare la struttura della macchina ed eventualmente la configurazione.
2. Si dica, spiegandone brevemente i motivi, se una tal macchina dotata di  $k > h$  testine ha una potenza di calcolo (e.g. capacità di riconoscere linguaggi) maggiore di quella dotata di sole  $h$  testine.
3. Si dica, spiegandone brevemente i motivi, se una tal macchina dotata di  $k > h$  testine ha la capacità di risolvere problemi (e.g. di riconoscere linguaggi) con complessità strettamente inferiori (secondo la relazione  $\Theta$ ) rispetto a quella dotata di sole  $h$  testine.

## Esercizio 2 (punti 10)

Si considerino le due grammatiche seguenti:

G1:

$S \rightarrow ADaCD \mid DAbDC$

$DC \rightarrow CD \mid AA$

$A \rightarrow a \mid SSAD$

$C \rightarrow ADC \mid c$

$SA \rightarrow AS \mid \epsilon$

G2:

$S \rightarrow aADCD \mid DbADC$

$DC \rightarrow CD \mid AA$

$A \rightarrow a \mid SSAD \mid \epsilon$

$C \rightarrow ADC \mid c$

$SA \rightarrow AS \mid \epsilon$

Si dica, giustificando brevemente le risposte, se i seguenti problemi sono decidibili:

- 1) G1 è equivalente a G2?
- 2) Data una generica grammatica regolare  $G$ ,  $G$  è equivalente a G1?

## Esercizio 3 (punti 10)

Si formalizzi mediante una formula del prim'ordine il linguaggio  $L$  costituito da stringhe del tipo  $wcu$ , in cui  $w$  e  $u$  denotano stringhe non nulle consistenti dei soli caratteri 'a' e 'b' tali che almeno in una posizione a partire dal loro inizio si trovi lo stesso carattere. Per esempio la stringa  $ababcaabaaa$  appartiene a  $L$ ,  $aaaaacbb$  non vi appartiene, ecc.

## Soluzioni

### Esercizio 1

1. Partendo dalla normale formalizzazione delle macchina a nastro singolo basta modificare la funzione  $\delta$  nel modo seguente:

$$\delta: Q \times A^h \rightarrow Q \times A^h \times M^h \mid M \in \{R, L, S\}$$

La definizione di configurazione dovrà tener conto della posizione delle  $h$  testine, ad esempio mediante apposite marche.

2. La potenza di calcolo ovviamente non aumenta, essendo già massima la potenza della macchina con una sola testina.
3. Aumenta invece la capacità di riconoscere linguaggi con minor complessità, come dimostrato dal seguente ragionamento intuitivo:

Il linguaggio  $\{w^h \mid w \in \{a,b\}^*\}$  non è riconoscibile in tempo lineare da una macchina a nastro singolo con una sola testina ma è facilmente riconoscibile con 2 testine in tempo  $O(n)$ ; con una naturale estrapolazione il linguaggio

$$\{w^h w^{h-1} \dots w^1 \mid w \in \{a,b\}^* \text{ ripetuto } h \text{ volte} \}$$

può essere riconosciuto in tempo lineare mediante  $h+1$  testine ma non con sole  $h$  testine.

### Esercizio 2

- 1) Senza bisogno di rispondere al quesito se le due grammatiche siano equivalenti o meno, si può comunque affermare che il problema di trovare tale risposta è decidibile, dato che la risposta non può che essere SI o NO indipendentemente da qualsiasi altro fattore. Quindi una tra le macchine di Turing che forniscono risposta costante SI e quella che forniscono risposta costante NO risolve il problema di stabilire se le due grammatiche siano equivalenti.
- 2) Senza analizzare la regolarità del linguaggio di  $G_1$ , o  $G_1$  genera un linguaggio regolare, oppure non lo genera. Se non lo genera, la risposta è sempre negativa, dunque decidibile. Se lo genera, allora il problema si riconduce all'equivalenza tra automi a stati finiti, che è decidibile.

### Esercizio 3

Seguendo una schema consueto si usino simboli di variabili per indicare generiche stringhe o generici caratteri,  $a, b, c$  essendo invece simboli di costanti corrispondenti ai caratteri dell'alfabeto. Usando inoltre le normali abbreviazioni  $\cdot$  e  $|$  per rappresentare la funzione binaria concatenazione e la funzione "lunghezza di una stringa" la cui definizione viene data qui per scontata, la formula seguente caratterizza tutte e sole le stringhe del linguaggio:

$$x \in L \leftrightarrow \exists w, u, v, z (x = w^h u^{h-1} v^{h-2} z \wedge |w| = |v| \wedge (f = a \vee f = b) \wedge (w, u, v, z \in \{a, b\}^*)).$$