Argomenti Avanzati

Complessità vs nondeterminismo

- Esiste una sorta di “classe universale di complessità”
  - cioè esiste una qualche funzione di complessità T(n) tale che tutti i problemi risolvibili impiegano al più $T(n)$?
- Il nondeterminismo può cambiare la complessità di soluzione dei problemi?
  - in primis, come si definisce la complessità di un modello nondeterministico?
- Cominciamo con alcune definizioni, per fissare le idee

- Data una funzione $T(n)$, indichiamo con DTIME(T) l'insieme dei problemi tali che esiste un algoritmo che li risolve in tempo $T(n)$
- Più precisamente:
  - problema = riconoscimento di un linguaggio
    - per semplicità, consideriamo i linguaggi ricorsivi
  - algoritmo = macchina di Turing
- Riformulando: DTIME(T) (risp. DSPACE(T)) è la classe (l'insieme) dei linguaggi (ricorsivi) riconoscibili in tempo (risp. spazio) T mediante macchine di Turing *deterministiche* a k nastri di memoria

- Un primo risultato: data una funzione totale e computabile $T(n)$, esiste un linguaggio ricorsivo che non è in DTIME(T)
  - c'è quindi una *gerarchia* di linguaggi (problemi) definita sulla base della complessità temporale deterministica
    - una cosa analoga vale per DSPACE, e per le computazioni nondeterministiche (NTIME ed NSPACE)
    - a proposito...

Computazioni nondeterministiche

- Data una macchina di Turing nondeterministica M, definiamo la sua complessità temporale $T_M(x)$ per riconoscere la stringa x come la lunghezza della computazione *più breve* tra tutte quelle che accettano x
  - $T_M(n)$ poi è (nel caso pessimo) il massimo tra tutti i $T_M(x)$ con $|x| = n$
- Quindi NTIME(T) è la classe (l'insieme) dei linguaggi (ricorsivi) riconoscibili in tempo T mediante macchine di Turing **non***deterministiche* a k nastri di memoria

- Tantissimi problemi si risolvono in modo molto naturale mediante meccanismi nondeterministici (per esempio, trovare un cammino in un grafo che tocca tutti i nodi)...
- ... però gli attuali meccanismi di calcolo sono deterministici
- se riuscissimo a trovare una maniera “poco onerosa” per passare da una formulazione nondeterminisitca ad una deterministica, tantissimi problemi interessanti potrebbero essere risolti (in pratica) in modo (teoricamente) efficiente
  - però spesso abbiamo notato una “esplosione” nel passaggio da un meccanismo ND ad uno D (quando i 2 meccanismi sono equipotenti, come è peraltro il caso delle MT)
    - per esempio, esplosione del numero degli stati nel passare da NDFSA a DFSA

Relazione tra DTIME e NTIME

- Sarebbe utile poter determinare, date certe interessanti famiglie di funzioni di complessità, se la classe dei problemi risolvibili non cambia nel passare da computazioni deterministiche a quelle nondeterministiche
  - in altri termini, se $\mathrm{DTIME}(\mathscr{F}) = \mathrm{NTIME}(\mathscr{F})$ per certe famiglie $\mathscr{F}=\{T_i\}$, di funzioni
- Una fondamentale classe di problemi:
  $\mathrm{P} = \cup_{i\geq 1} \mathrm{DTIME}(n^i)$
  - convenzionalmente, questi sono considerati i problemi "trattabili"
- Similmente:
  $\mathrm{NP} = \cup_{i\geq 1} \mathrm{NTIME}(n^i)$
- Altre classi interessanti di problemi: PSPACE, NPSPACE, EXPTIME, NEXPTIME, EXPSPACE, NEXPSPACE

- **La** domanda: P = NP?
  - boh...
  - probabilmente no, ma non si è ancora riusciti a dimostrarlo

- Alcuni esempi di problemi della classe NP:
  - Soddisfacibilità di formule di logica proposizionale (SAT): data una formula F di logica proposizionale, esiste un assegnamento dei valori alle lettere proposizionali che compaiono in F tale che F è vera?
    - detto in altro modo: F ammette un modello?
  - Circuito hamiltoniano (HC): dato un grafo G, esiste un cammino in G tale che tutti i nodi del grafo sono toccati una ed una sola volta prima di tornare al nodo di partenza?

Riduzione in tempo polinomiale e completezza

- Un linguaggio (problema) L_1 è riducibile in tempo polinomiale ad un altro linguaggio L_2 se e solo se esiste una MT deterministica (traduttrice) con complessità in P che per ogni x produce una stringa $\tau(x)$ tale che $\tau(x) \in L_2$ se e solo se $x \in L_1$

- Se $\mathscr{L}$ è una classe di *linguaggi*, diciamo che un linguaggio L (che non è detto che debba essere in $\mathscr{L}$) è **$\mathscr{L}$-difficile** rispetto alle riduzioni in tempo polinomiale se e solo se, per ogni $L' \in \mathscr{L}$, L' è riducibile in tempo polinomiale a L
  - cioè se risolvere L (determinare se una stringa x appartiene ad L o no) è almeno tanto difficile quanto risolvere un qualunque linguaggio in $\mathscr{L}$
- Un linguaggio L è **$\mathscr{L}$-completo** se è $\mathscr{L}$-difficile ed è in $\mathscr{L}$

- se si trovasse un problema NP-completo che è risolvibile in tempo polinomiale da macchina deterministica, allora avremmo P = NP
- dualmente, se si trovasse un problema NP-completo che non è risolvibile in tempo polinomiale da macchina deterministica, allora avremmo P $\subset$ NP

- SAT è NP-difficile
  - quindi è NP-completo
  - si mostra codificando le computazioni di una generica MT nondeterministica M (con complessità polinomiale) in SAT, in modo che M accetta una stringa x se e solo se una opportuna formula s è soddisfacibile
- HC è anch'esso NP-difficile (e NP-completo)
  - NP-completezza di HC si mostra riducendo SAT a HC
- tantissimi altri problemi sono NP-completi...

Programmazione dinamica

- Come la tecnica divide-et-impera si basa sull'idea di scomporre il problema in sottoproblemi, risolvere quelli, e ricombinarli
  - si applica però quando i problemi non sono indipendenti, cioè condividono dei sottoproblemi
  - quando si risolve un sottoproblema comune, si mette la soluzione in una tabella, per riutilizzarla in seguito
    - il termine “programmazione” qui non si riferisce alla codifica in linguaggi di programmazione, ma al fatto che è una tecnica tabulare
- Programmazione dinamica spesso usata per problemi di ottimizzazione
  - la “soluzione” è un ottimo del sottoproblema
    - un problema potrebbe avere più soluzioni ottime

- Tipici passi nello sviluppo di un algoritmo di programmazione dinamica:
  - caratterizzare la struttura delle soluzioni ottimali
  - definire ricorsivamente il valore di una soluzione ottimale del problema
  - calcolare una soluzione ottimale in modo bottom-up
    - dai sottoproblemi più semplici a quelli più difficili, fino al problema originario
  - costruire una soluzione ottimale del problema richiesto

Problema: taglio delle aste

- Il prezzo di un'asta di acciaio dipende dalla sua lunghezza
- problema: date delle aste di lunghezza *n* che posso tagliare in pezzi più corti, devo trovare il modo ottimale di tagliare le aste per massimizzare il ricavo che posso derivare dalla vendita delle aste
  - il ricavo massimo lo potrei avere anche non tagliando l'asta, e vendendola intera
- Esempio di tabella dei prezzi:

lunghezza i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
prezzo p_i	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

- per esempio, un'asta di lunghezza 4 può essere tagliata in tutti i modi seguenti (tra parentesi il prezzo): [4](9), [1,3](9), [2,2](10), [3,1](9), [1,1,2](7), [1,2,1](7), [2,1,1](7), [1,1,1,1](4)
  - il taglio ottimale in questo caso è unico, ed è [2,2]

- Data un'asta di lunghezza *n*, ci sono 2^{n-1} modi di tagliarla
  - ho *n*-1 punti di taglio, se indico con una sequenza di *n*-1 0 e 1 la decisione di tagliare o no ai vari punti di taglio (per esempio, per un'asta lunghezza 4, la decisione di non tagliare è data da 000; la decisione di tagliare solo a metà è data da 010, ecc.), ogni sequenza corrisponde ad un numero binario, e con *n*-1 cifre binarie posso rappresentare fino a 2^n valori

- Chiamiamo r_n il ricavo massimo ottenibile dal taglio di un'asta di lunghezza *n*
  - per esempio, dati i prezzi della tabella di cui sopra abbiamo $r_4 = 10$, mentre $r_{10} = 30$ (derivante da nessun taglio)

Sottostruttura ottima

- Per un qualunque n, la forma di r_n è del tipo r_i+r_{n-i}
  - a meno che l'ottimo preveda di non tagliare l'asta; in questo caso abbiamo $r_n = p_n$, il prezzo dell'asta intera
  - in altre parole,
    $r_n = \max(p_n, r_1+r_{n-1}, r_2+r_{n-2}, ..., r_{n-1}+r_1)$
- Quindi, l'ottimo è dato dalla somma dei ricavi ottimi derivanti dalle 2 semiaste ottenute tagliando l'asta in 2
  - l'ottimo incorpora cioè i 2 ottimi delle soluzioni dei 2 sottoproblemi
  - notiamo che per forza è così: se non fosse vero che r_i ed r_{n-i} sono gli ottimi dei rispettivi sottoproblemi, allora, sostituendo per esempio ad r_i una soluzione ottima del taglio di un'asta di lunghezza i otterremmo un ricavo totale $< r_n$, che non potrebbe essere più ottimo

- Quando la soluzione di un problema incorpora le soluzioni ottime dei suoi sottoproblemi, che si possono risolvere indipendentemente, diciamo che il problema ha una *sottostruttura ottima*

- Riformulando l'espressione dell'ottimo r_n, inoltre, possiamo fare dipendere r_n dall'ottimo di un solo sottoproblema:
  - r_n = prezzo del primo pezzo tagliato + taglio ottimo della restante asta, cioè $r_n = p_i + r_{n-i}$
    - ciò vale anche nel caso particolare in cui l'asta non va tagliata; in questo caso è $r_n = p_n + r_0$, con $r_0 = 0$
- Quindi, $r_n = \max_{1 \leq i \leq n}(p_i + r_{n-i})$

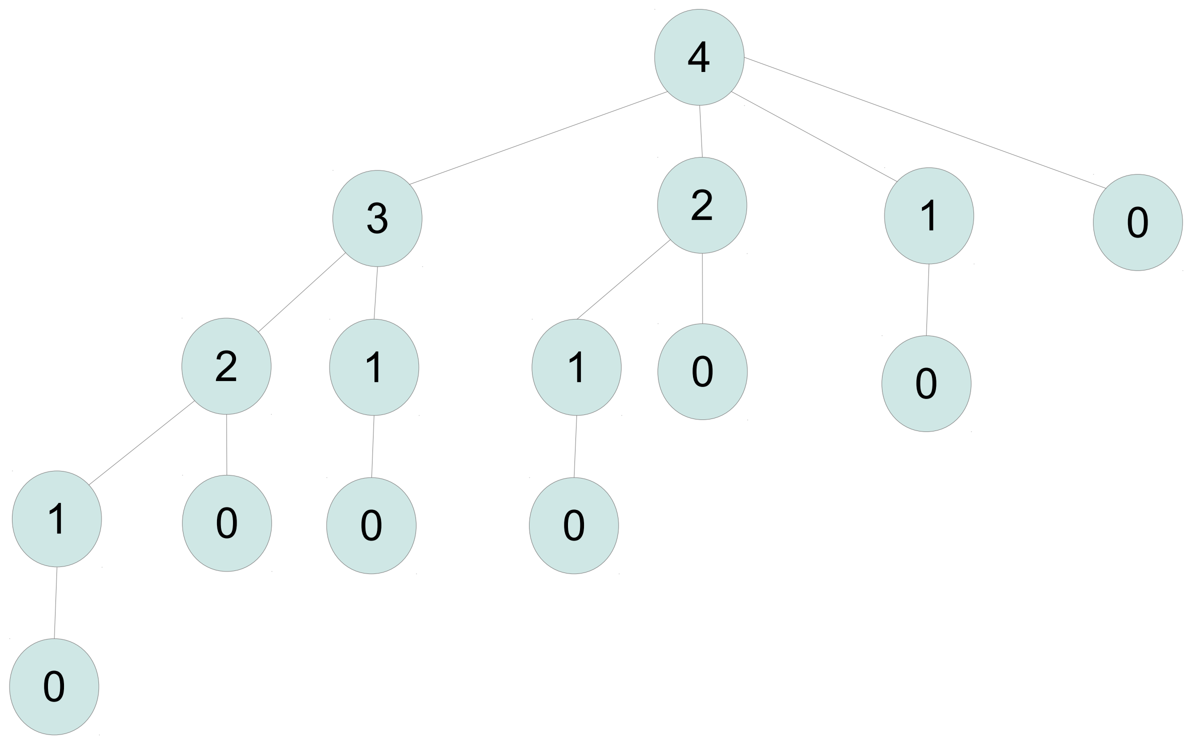
Algoritmo ricorsivo

- Applicando l'espressione ricorsiva appena vista della soluzione del problema del taglio delle aste otteniamo il seguente algoritmo

```
CUT-ROD(p,n)
if n = 0
  return 0
q := -∞
for i := 1 to n
  q := max(q, p[i] + CUT-ROD(p,n-i))
return q
```

- Complessità temporale: $$T(n) = cost + \sum_{j=0}^{n-1} T(j)$$

- si può verificare che è $T(n) = \Theta(2^n)$
- Il tempo di esecuzione è così alto perché gli stessi problemi vengono risolti più e più volte:



Algoritmo di programmazione dinamica

- Usando un po' di memoria extra, si riesce a migliorare di molto il tempo di esecuzione
  - addirittura diventa polinomiale
  - trade-off spazio-temporale: aumento la complessità spaziale, riducendo quella temporale
- Idea: memorizzo il risultato dei sottoproblemi già calcolati, e quando le reincontro, invece di ricalcolarli, mi limito ad andare a prendere il risultato dalla tabella
  - risolvo ogni problema distinto *una volta sola*
  - il costo diventa polinomiale se il numero di problemi *distinti* da risolvere è polinomiale, e la risoluzione dei singoli problemi richiede tempo polinomiale

- 2 tecniche per implementare la programmazione dinamica: un metodo top-down, ed uno bottom-up
- Nel metodo **top-down**, comincio a risolvere il problema di dimensione *n*, e ricorsivamente vado a risolvere i sottoproblemi via via più piccoli; aumento però l'insieme dei parametri passati con una tabella nella quale memorizzo i risultati già calcolati
  - prima di lanciare la ricorsione sul problema più piccolo, controllo nella tabella se non ho già calcolato la soluzione
  - questa tecnica va sotto il nome di **memoization**
- Nel metodo **bottom-up**, parto dai problemi più piccoli, e li risolvo andando in ordine crescente di dimensione; quando arrivo a risolvere un problema di dimensione *i*, ho già risolto tutti i problemi di dimensioni < *i*

versione memoized di CUT-ROD

```
MEMOIZED-CUT-ROD(p, n)
crea un nuovo array r[0..n]
for i := 0 to n
  r[i] := -∞
return MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p,n,r)

MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p,n,r)
if r[n] ≥ 0
  return r[n]
if n = 0
  q := 0
else q := -∞
  for i := 1 to n
    q := max(q, p[i] + MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p,n-i,r))
r[n] := q
return q
```

- `MEMOIZED-CUT-ROD` ha complessità $T(n) = \Theta(n^2)$:
- ogni sottoproblema è risolto una volta sola, ed il ciclo 6-7 fa *n* iterazioni per risolvere un problema di dimensione *n*
  - quindi si fanno in tutto $n + (n-1) + (n-2) + ... + 1$ iterazioni

Bottom-up CUT-ROD

- Gli algoritmi CUT-ROD visti fino ad ora restituiscono il massimo ricavo, ma non il modo in cui l'asta va tagliata
- teniamo traccia non solo del massimo, ma del modo di effettuare il taglio con l'array s
  - `s[j]` mi dice quale è la lunghezza del primo pezzo nel taglio ottimale di un'asta di lunghezza *j*
- Esempio di risultato di un'esecuzione:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30
r[i]	0	1	5	8	10	13	17	18	22	25	30
s[i]	0	1	2	3	2	2	6	1	2	3	10

```
BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)
crea 2 nuovi array r[0..n] e s[0..n]
r[0] := 0
for j := 1 to n
  q := -∞
  for i := 1 to j
    if q < p[i] + r[j-i]
      q := p[i] + r[j-i]
      s[j] := i
  r[j] := q
return (r,s)
```

è facile vedere che BOTTOM-UP-CUT-ROD ha complessità $T(n) = \Theta(n^2)$ a causa dei 2 cicli annidati

```
PRINT-CUT-ROD-SOLUTION(p, n)
(r,s) := BOTTOM-UP-CUT-ROD(p,n)
while n > 0
  print s[n]
  n := n - s[n]
```

Algoritmi golosi

- Per quanto con la programmazione dinamica un sottoproblema non venga risolto più di una volta, comunque occorre analizzare diverse soluzioni per decidere quale è l'ottimo
- A volta però non serve provare tutte le soluzioni: è dimostrabile che una sola può essere quella ottima
- Questo è esattamente quel che succede negli algoritmi “golosi” (*greedy*)

- In generale, gli algoritmi golosi si muovono per "ottimi locali":
- se vedono davanti a loro una strada "promettente", la prendono senza farsi troppi problemi (in questo senso sono golosi).
- Ovviamente questo può portare a soluzioni non ottime a livello globale, ma in alcuni casi si riesce a dimostrare che si raggiunge l'ottimo
- Spesso vengono usati in problemi difficili, in cui l'ottimo locale rappresenta una "buona approssimazione" dell'ottimo globale

Il problema della scelta delle attività

- *n* attività $a_1, a_2, .., a_n$ usano la stessa risorsa
  - es: lezioni da tenere in una stessa aula
- Ogni attività a_i ha un tempo di inizio s_i ed un tempo di fine f_i con $s_i < f_i$
- a_i occupa la risorsa nell'intervallo temporale semiaperto $[s_i, f_i)$
- a_i ed a_j sono compatibili se $[s_i, f_i)$ e $[s_j, f_j)$ sono disgiunti
- voglio scegliere il massimo numero di attività compatibili
  - supponiamo che le attività $a_1, a_2, .., a_n$ siano ordinate per tempo di fine non decrescente $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n$ altrimenti le ordiniamo in tempo $O(n \log n)$

- Esempio

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

- insieme di attività compatibili: $\{a_3, a_9, a_{11}\}$
- massimo numero di attività compatibili: 4
  - un esempio: $\{a_2, a_4, a_9, a_{11}\}$

Soluzione

- Possiamo risolvere il problema con un algoritmo di programmazione dinamica
- Definiamo S_{ij} come l'insieme delle attività che iniziano dopo la fine di a_i e terminano prima dell'inizio di a_j
  - quindi che sono compatibili con a_i (e quelle che non terminano dopo a_i) e con a_j (e quelle che iniziano non prima di a_j)
  - $S_{ij} = \{a_t \in S : f_i \leq s_t < f_t \leq s_j \}$
- Chiamiamo A_{ij} un insieme massimo di attività compatibili in S_{ij}
  - supponiamo che a_k sia una attività di A_{ij}, allora A_{ij} è della forma: $A_{ij} = A_{ik} \cup \{a_k\} \cup A_{kj}$
    - è fatto dell'ottimo del sottoproblema S_{ik} più l'ottimo del sottoproblema S_{kj}
      - se così non fosse, allora potrei trovare un insieme di attività più grande di A_{ik} (resp. A_{kj}), in S_{ik}, il che vorrebbe dire che A_{ij} non è un ottimo di S_{ij} (assurdo)
    - questa è dunque una sottostruttura ottima

- Memorizziamo in una tabella *c* la dimensione dell'ottimo del problema A_{ij}, cioè $c[i, j] = |A_{ij}|$
- Allora abbiamo che $c[i, j] = c[i, k] + c[k, j] + 1$
- Se non sappiamo che la soluzione ottima include l'attività a_k, dobbiamo provare tutte le attività in S_{ij}, cioè

$$c[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } S_{ij} = \emptyset \\ \max\limits_{a_k \in S_{ij}} \{c[i, k] + c[k, j] + 1\} & \text{se } S_{ij} \neq \emptyset \end{cases}$$

  - esercizio per casa: scrivere gli algoritmi di programmazione dinamica con memoization e con tecnica bottom-up

Algoritmo goloso

- E' inutile però provarle tutte per risolvere il problema S_{ij}, è sufficiente prendere l'attività a_1 che finisce per prima in S_{ij}, e risolvere il problema S_{kj}, con k prima attività in S_{ij} che inizia dopo la fine di a_1
  - se chiamiamo S_k l'insieme di tutte le attività che iniziano dopo la fine di a_k, cioè $S_k = \{a_t \in S : f_k \leq s_t\}$, dopo che abbiamo preso a_1, ci rimane da risolvere il solo problema S_1
- Abbiamo il seguente risultato:
  dato un sottoproblema S_k, se a_m è l'attività che finisce per prima in S_k, a_m è inclusa in qualche sottoinsieme massimo di attività mutuamente compatibili di S_k
  - supponiamo che A_k sia un sottoinsieme massimo di S_k, e chiamiamo a_j l'attività che finisce per prima in A_k; allora o $a_j = a_m$, oppure $f_m \leq f_j$, e se sostituisco a_j con a_m in A_k ho ancora un sottoinsieme massimo A'_k di S_k
- Quindi, per risolvere il problema di ottimizzazione mi basta ogni volta scegliere l'attività che finisce prima, quindi ripetere l'operazione sulle operazioni che iniziano dopo quella scelta

- Versione ricorsiva
  - *s* e *f* sono array con, rispettivamente, i tempi di inizio e di fine delle attività
  - *k* è l'indice del sottoproblema S_k da risolvere (cioè l'indice dell'ultima attività scelta
  - *n* è la dimensione (numero di attività) del problema originario

```
RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,k,n)
m := k + 1
while m ≤ n and s[m] < f[k]
  m := m + 1
if m ≤ n
  return {a_m} ∪ RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,m,n)
else return ∅
```

- Versione iterativa:

```
GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR(s,f)
n := s.length
A := {a_1}
k := 1
for m := 2 to n
  if s[m] ≥ f[k]
    A := A ∪ {a_m}
    k := m
return A
```

  - entrambe hanno complessità $\Theta(n)$, in quanto considerano ogni attività una volta sola