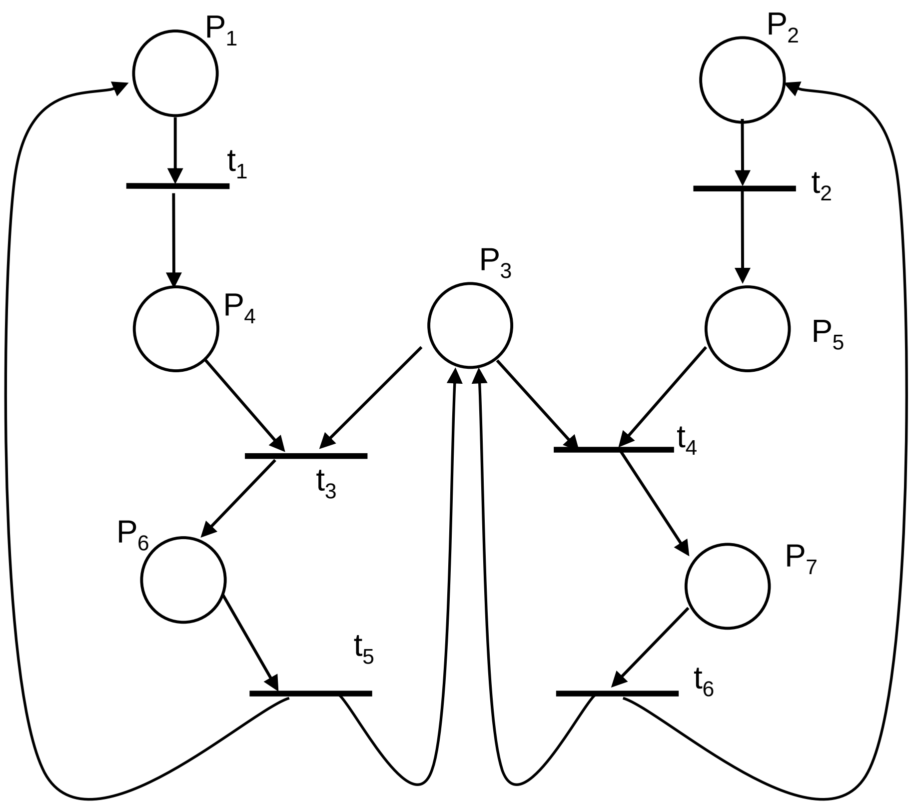
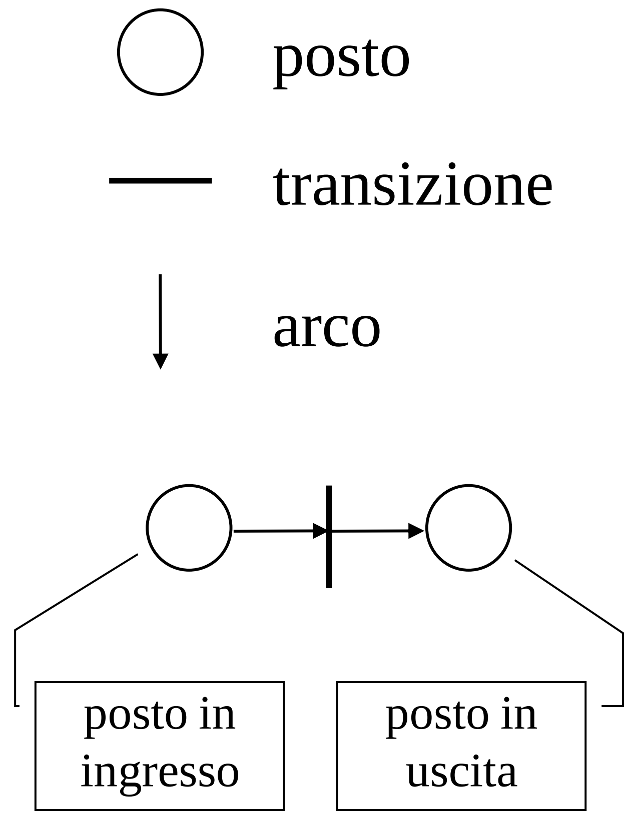
Reti di Petri

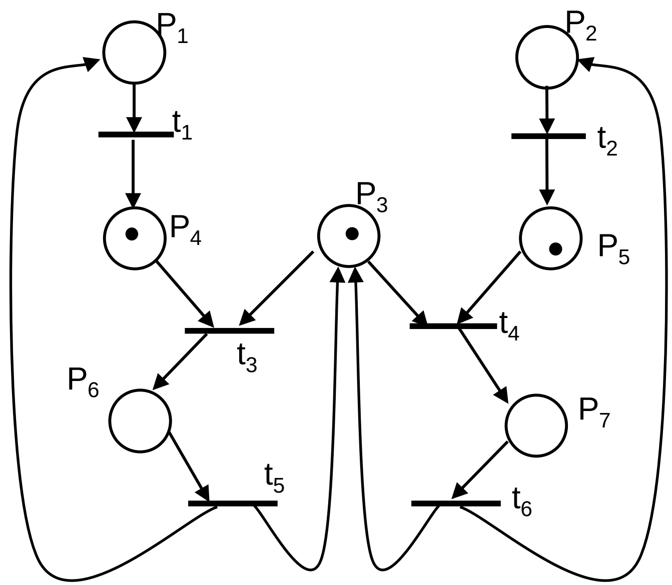
- Ideate negli anni ’60 da C. A. Petri
- Formalismo operazionale intrinsecamente nondeterministico
- Usate in ambiti anche molto diversi tra di loro
  - informatica, automazione, scheduling nei sistemi di produzione
- Ve ne sono diverse varianti

Primo esempio di rete di Petri





Il concetto di marcatura

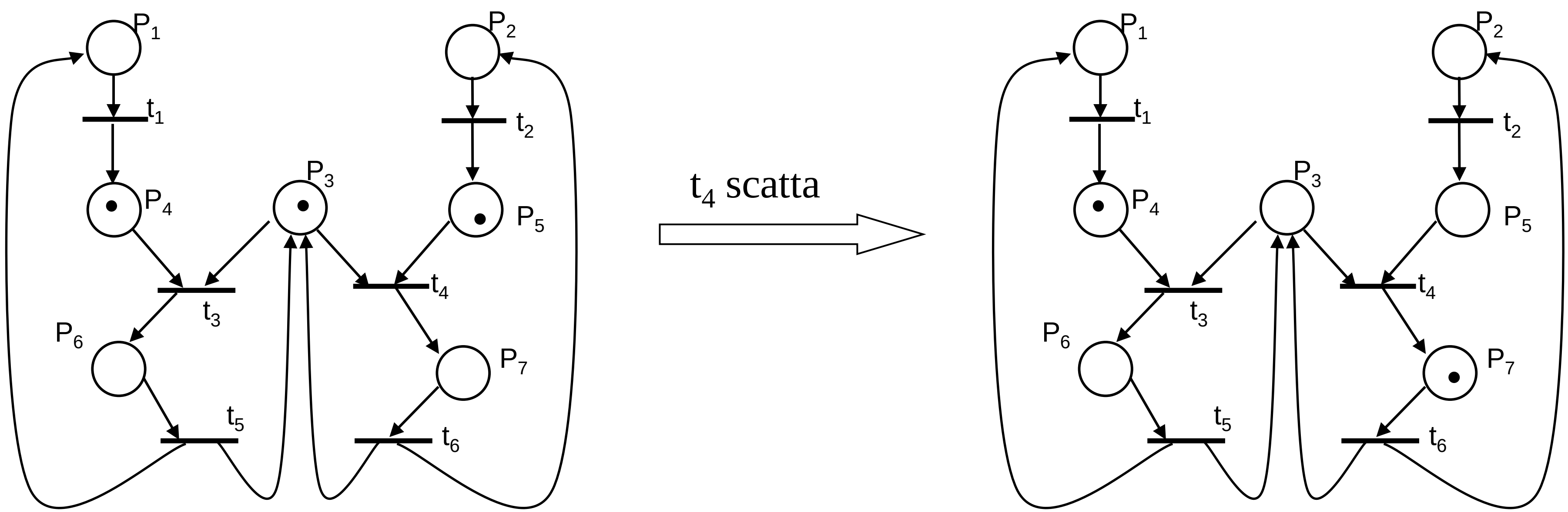


- token (gettone)

- Una transizione è *abilitata* quando tutti i suoi posti in ingresso hanno un numero “sufficiente” di gettoni
  – nella marcatura sopra, t_3 e t_4 sono entrambe abilitate, t_1 no

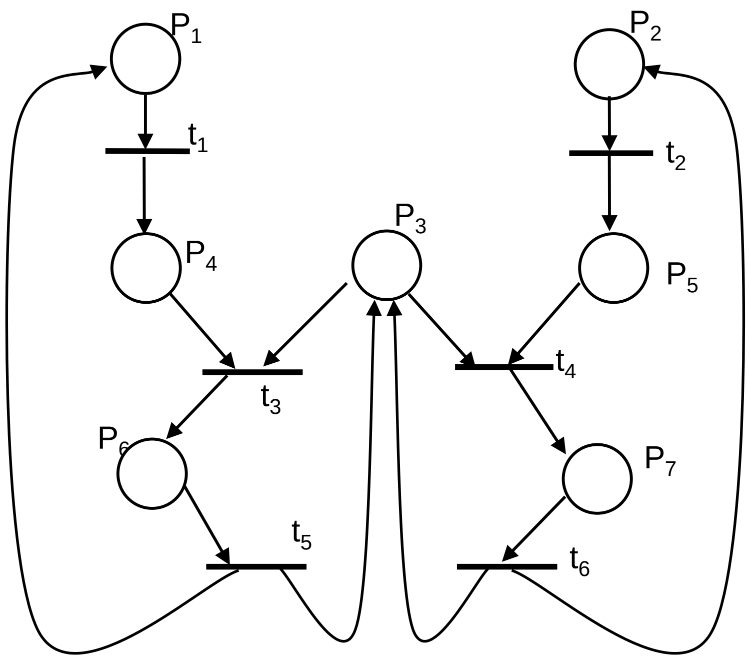
Scatto di una transizione

- Una transizione che è abilitata può scattare
- Lo scatto di una transizione elimina i gettoni dai posti in ingresso, e ne produce di nuovi nei posti in uscita



- Se più di una transizione è abilitata in una marcatura, la scelta di quella che scatta è *nondeterministica*

Transizioni concorrenti ed in conflitto



- In questa rete, t_1 e t_2 sono transizioni *concorrenti*, in quanto, se in una marcatura M sono entrambe abilitate, lo scatto di una non disabilita l'altra
  - quindi, in qualunque ordine esse avvengano, portano alla stessa marcatura
- t_3 e t_4, invece, sono in *conflitto* in quanto, se sono entrambe abilitate, lo scatto di una disabilita l'altra

Definizione formale di rete di Petri

- Rete di Petri: $\langle P, T, IF, OF \rangle$
  - P, insieme finito dei posti
  - T, insieme finito delle transizioni
    - $P \cap T = \emptyset$
  - IF: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ funzione di input delle transizioni
    - se tra il posto *p* e la transizione *t* non c'è nessun arco, IF(p,t) = 0
      - i posti in ingresso ad una transizione *t* sono quelli per cui IF(p,t) > 0
  - OF: $T \times P \rightarrow \mathbb{N}$ funzione di output delle transizioni
    - se tra la transizione *t* e il posto *p* non c'è nessun arco, OF(t,p) = 0
      - i posti in uscita ad una transizione *t* sono quelli per cui IF(t,p) > 0
- Marcatura M: $P \rightarrow \mathbb{N}$

Abilitazione, scatto di transizioni, raggiungibilità

- in una marcatura M, la transizione t è abilitata se e solo se $\forall p$ $M(p) \geq IF(p,t)$
- La relazione di transizione $\vdash$ è definita tra marcature: $M \vdash M'$
  - $\vdash^*$ è la chiusura riflessiva e transitiva della relazione $\vdash$
- $M \vdash M'$ se e solo se esiste una transizione *t* abilitata in M e, $\forall p$, si ha
  $M'(p) = M(p) - IF(p,t) + OF(t,p)$
  - la transizione *t scatta* nella marcatura M, producendo la marcatura M'
  - a volte scriveremo $M \vdash^t M'$ per evidenziare quale transizione ha prodotto M' da M
- Una marcatura M' è *raggiungibile* dalla marcatura M se e solo se $M \vdash^* M'$

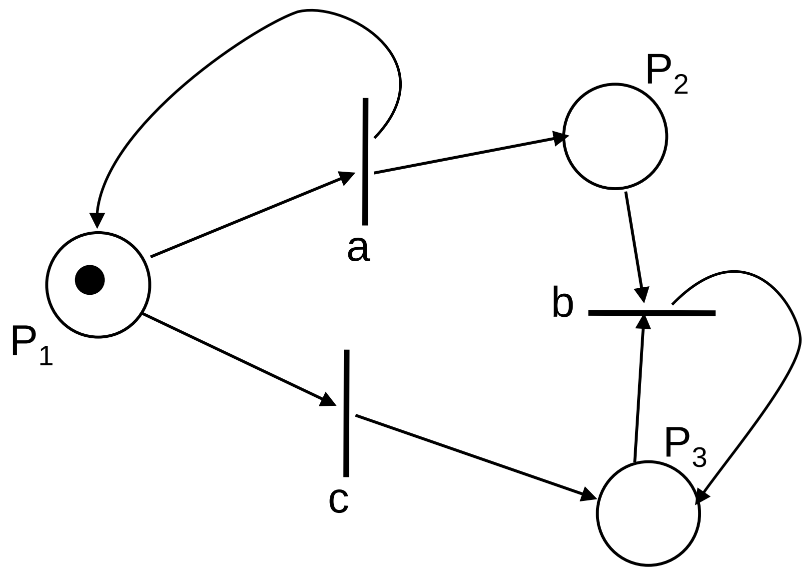
Reti di Petri come riconoscitori di linguaggi

- <P, T, IF, OF, Σ, L, M_0, F>
  - P, T, IF, OF come prima
  - M_0: marcatura iniziale
  - F: insieme finito di marcature finali
  - Σ è l'alfabeto di input
  - L: $T \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ è una funzione che *etichetta* ogni transizione della rete con un simbolo dell'alfabeto, oppure con ε in caso di etichetta vuota

Accettazione di una stringa

- Data una sequenza di marcature $M_0 \vdash^{t_1} M_1 \vdash^{t_2} \dots \vdash^{t_n} M_n$, $L(t_1)\cdot L(t_2) \cdot\dots\cdot L(t_n)$ è la stringa generata durante la sequenza
- una stringa $s \in \Sigma^*$ è accettata da una rete di Petri se e solo se esiste una sequenza di scatti di transizioni $t_1, \dots t_n$ tali che:
  - $M_0 \vdash^{t_1} M_1 \vdash^{t_2} \dots \vdash^{t_n} M_n$ con $M_n \in F$
  - $s = L(t_1)\cdot L(t_2) \cdot\dots\cdot L(t_n)$

Esempio di rete di Petri come riconoscitore



$F = \{M_F\}$
tale che:
$M_F(P_1) = M_F(P_2) = 0$
$M_F(P_3) = 1$

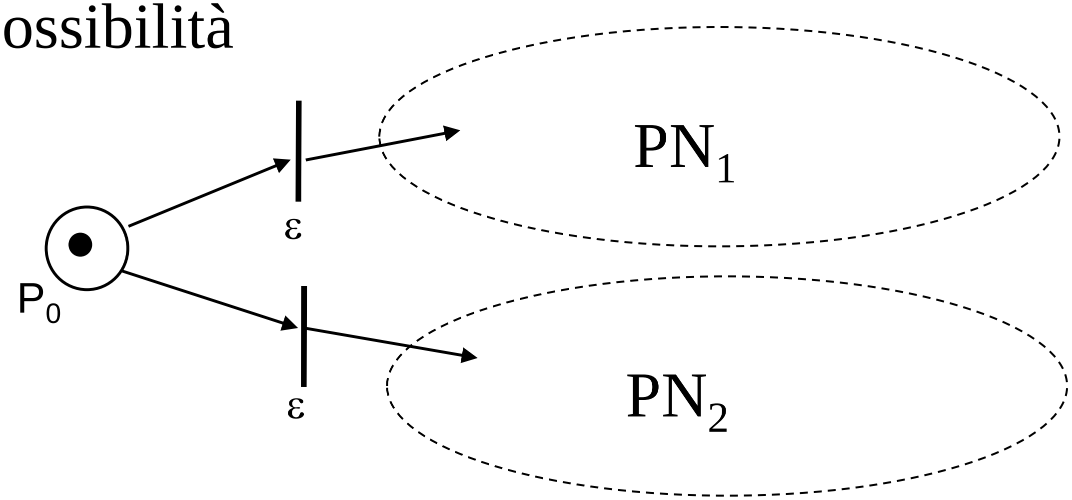
- Riconosce il linguaggio $L = \{ a^n c b^n \mid n \geq 0 \}$
  – indichiamo direttamente l'etichetta della transizione al posto del nome della transizione stessa

reti di Petri limitate

- Una rete di Petri è *k-limitata* se e solo se, $\forall M'$ tale che $M_0 \vdash^* M'$ si ha che il numero di gettoni nei posti della rete è al massimo k: $\forall p\ M'(p) \leq k$
  - caso particolare: reti 1-limitate
- Una rete di Petri è *limitata* se esiste un k tale che la rete è k-limitata

Proprietà di chiusura delle reti di Petri

- chiuse rispetto all'unione
  - facile sfruttare il nondeterminismo per fare una scelta iniziale tra le 2 possibilità

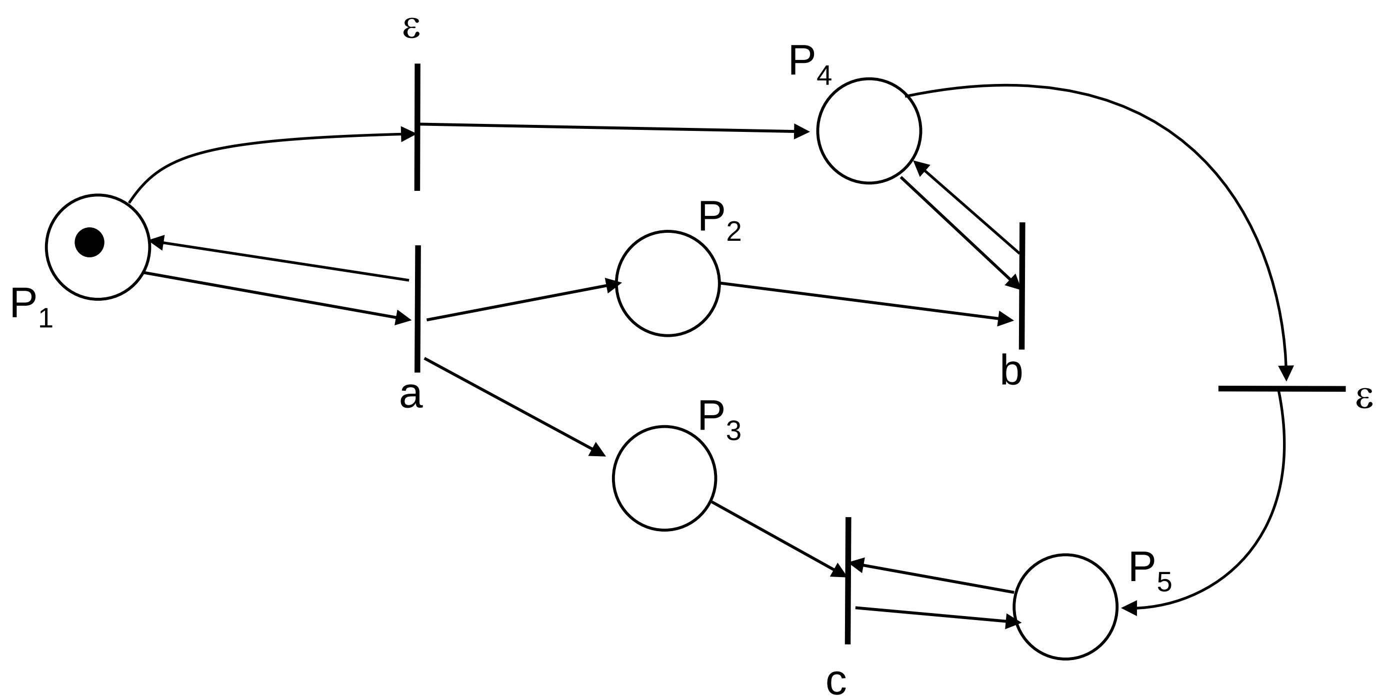


- chiuse anche rispetto all'intersezione
- non chiuse invece rispetto al complemento

Confronto con altri modelli

- Strettamente più potenti degli FSA
  - facile trasformare un (D)FSA A in una equivalente rete di Petri:
    - 1 posto P_i per ogni stato q_i di A
    - se $\delta(q_i,s)=q_{i'}$, aggiungiamo 1 transizione t_j, con $L(t_j)=s$, esattamente 1 posto in input P_i, ed esattamente 1 posto in output $P_{i'}$
    - marcatura iniziale: 1 gettone nel posto P_0
    - marcature finali: { se $q_f \in F$, 1 gettone nel posto P_f }
  - $L = \{ a^n c b^n \mid n \geq 0 \}$ riconoscibile mediante una PN, ma non mediante FSA
- Le reti di Petri *limitate*, però, hanno la stessa potenza espressiva degli FSA

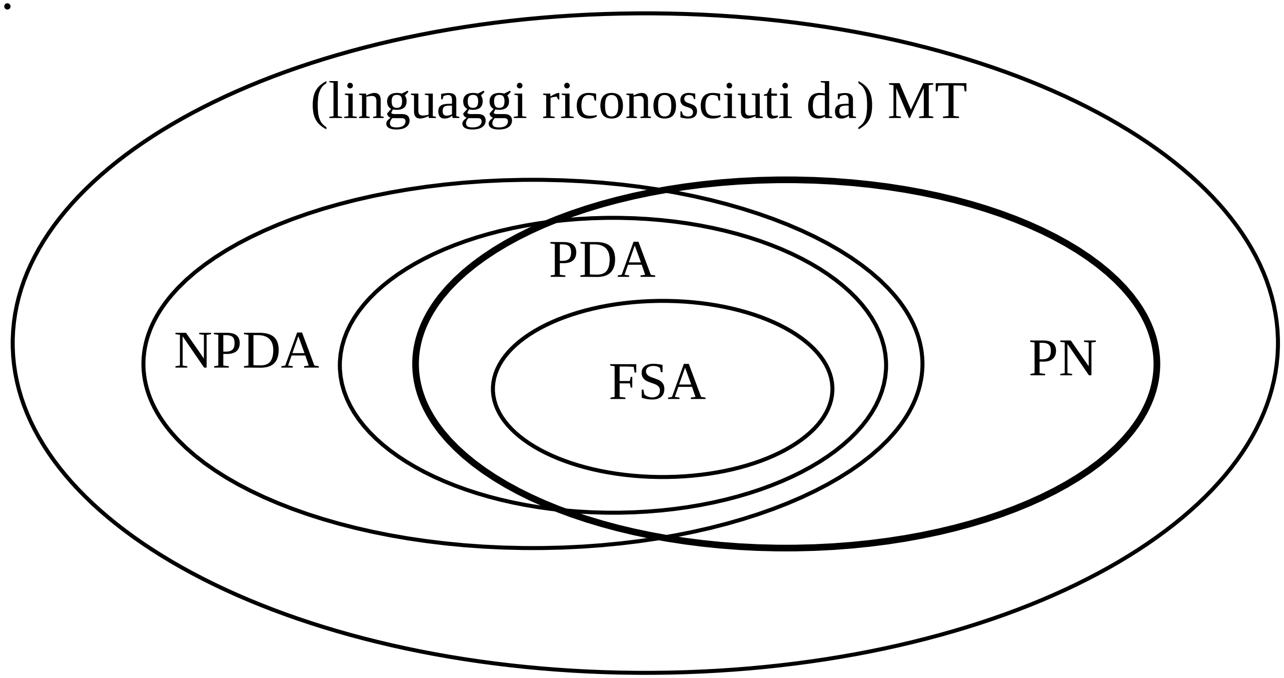
Confronto con (N)PDA



- $F = \{M_F\}$ tale che $M_F(P_5)=1$ e $M_F(P_i)=0$ per $i<5$
- riconosce il linguaggio $L=\{a^nb^nc^n \mid n\geq 0\}$

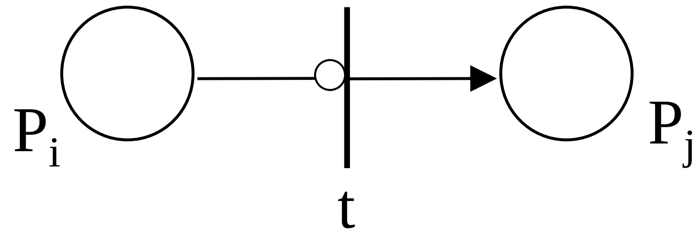
le reti di Petri sono allora più potenti dei (N)PDA?

- Riconoscono $L=\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ …
- … ma non sono in grado di riconoscere $L = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$
  - possono contare, ma i gettoni non hanno una "identità", non distinguono se un gettone è stato creato in seguito ad una *a* o ad una *b*
- Quindi:



Reti di Petri con archi inibitori

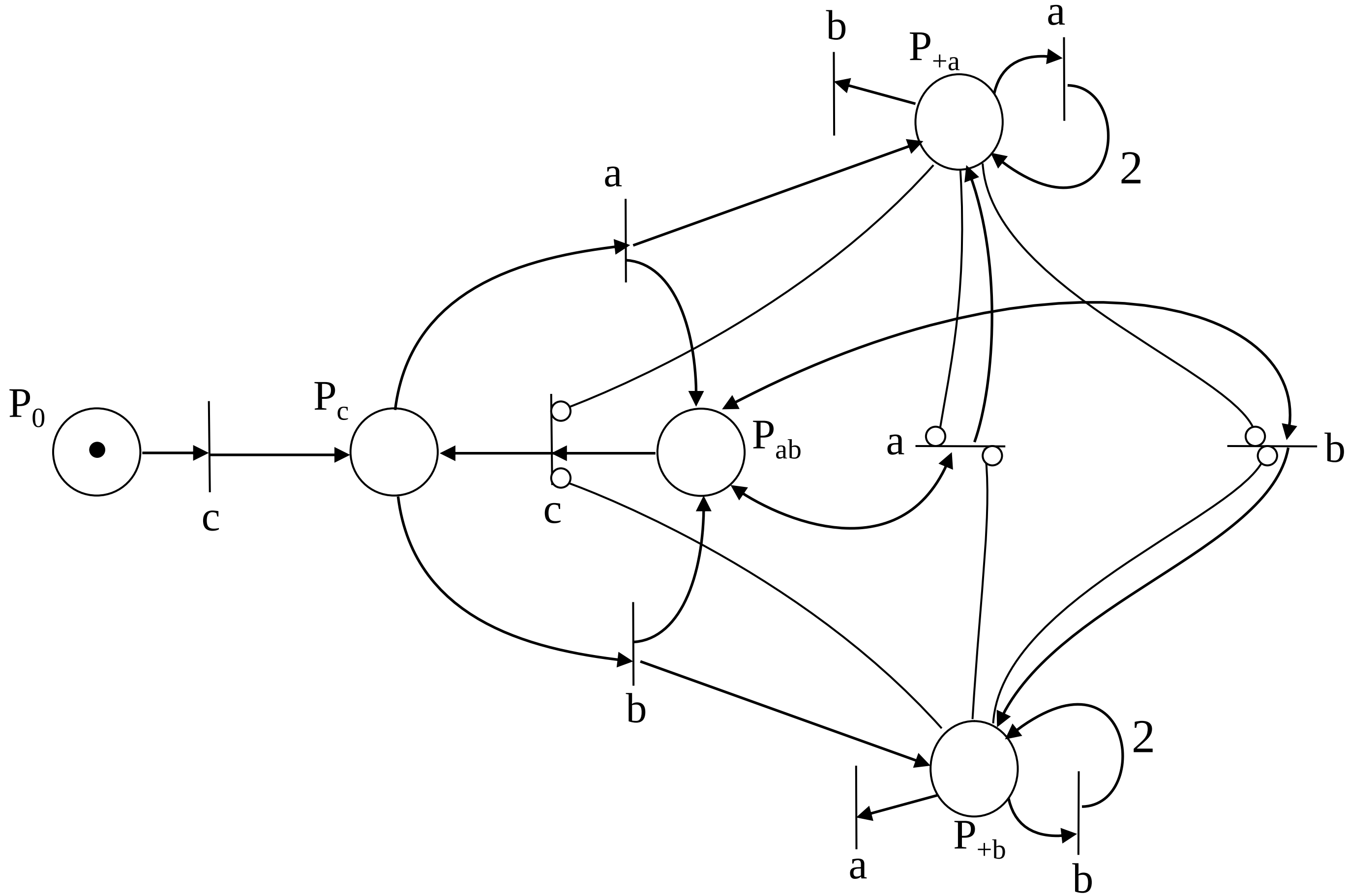
- Arco inibitore:



  - la transizione t è abilitata solo se il posto P_i è *vuoto*

- Rete di Petri con archi inibitori: <P, T, IF, OF, I>
  - I: $P \times T$ è la relazione di inibizione
    - se $(p,t) \in I$ allora c'è un arco inibitore tra il posto *p* e la transizione *t*

Esempio di rete di Petri con archi inibitori



- $F = \{M_F\}$ tale che $M_F(P_c)=1$, tutti gli altri posti vuoti
- $L = L_1^{*} \cdot c$ con $L_1 = \{cw \mid w \in \{a,b\}^{+}$ in cui $\#a=\#b\}$

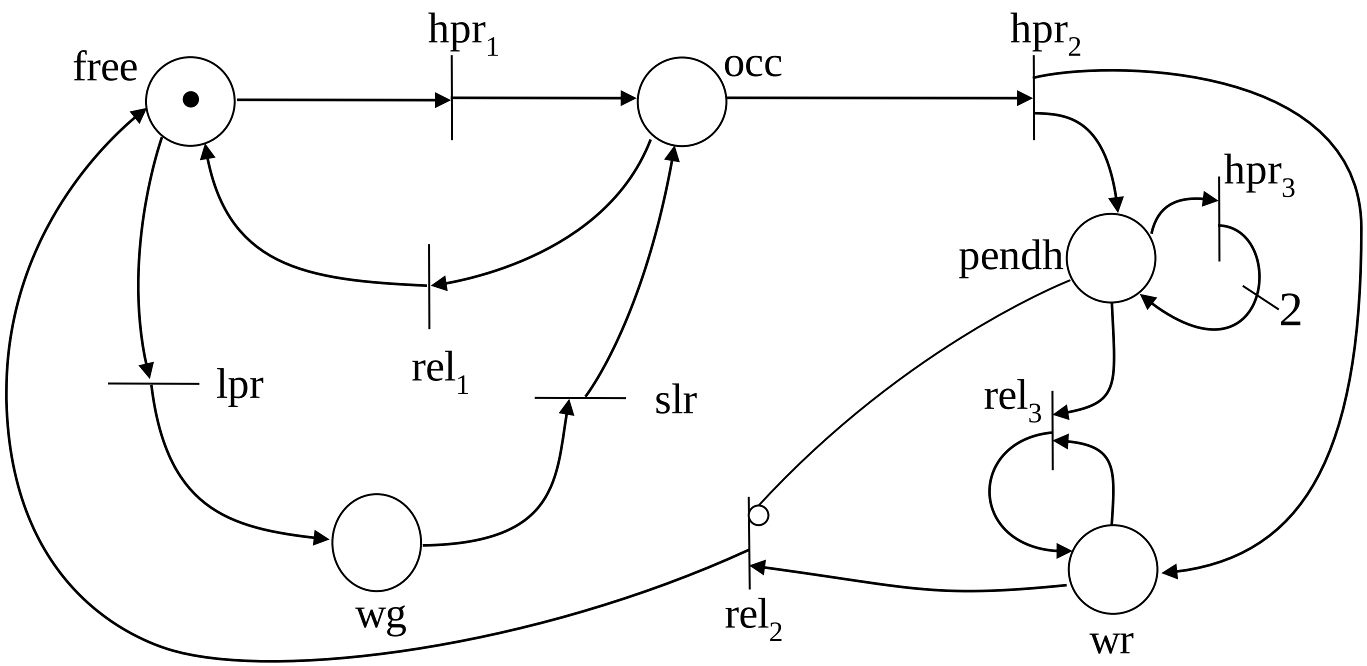
Cosa cambia con gli archi inibitori?

- PN con archi inibitori sono più potenti della variante “base”, senza archi inibitori
- PN con archi inibitori hanno la potenza delle MT
  - è possibile simulare il funzionamento di una MT mediante una PN con archi inibitori
- … quindi hanno anche tutte le proprietà delle MT
  - chiuse rispetto a intersezione e unione, ma non rispetto a complemento, ecc.

Esempio di modellazoione con RP: un allocatore

- Sistema con 1 risorsa e 2 tipi di richieste: ad alta priorità e a bassa priorità
- Inizialmente la risorsa è libera
- Quando è libera, ed arriva una richiesta a bassa priorità, la risorsa viene prima o poi assegnata alla richiesta a bassa priorità e diventa “occupata”
- Quando la risorsa è occupata, non è più possibile ricevere nuove richieste a bassa priorità, mentre ce ne posso essere ad alta priorità
- la rete di Petri “conta” quante richieste ad alta priorità sono pendenti tramite il numero di gettoni nel posto *pendh*
- ogni volta che una richiesta ad alta priorità viene soddisfatta, il numero di richieste pendenti diminuisce, fino a che non ce ne sono più

Rete di Petri dell'allocatore



- Modellino dell'allocatore che accetta richieste o ad alta (hpr_i) o a bassa (lpr) priorità