Algoritmi e Principi dell'Informatica

Parte I – Modelli e computabilità

Appello dell'8 settembre 2011

Tempo a disposizione: 1h30'

Esercizio 1 (12 punti)

Si consideri il linguaggio L fatto di tutte e sole le stringhe $x \in \{a, b\}^*$ in cui *ogni prefisso y* di *x* è tale che $\#b(y) \geq \#a(y)$, laddove con $\#a(y)$ e $\#b(y)$ si indica, rispettivamente, il numero di *a* e di *b* nella stringa *y*.

1. Si scriva una grammatica che generi L. La grammatica scritta è a potenza minima tra quelle che generano L? Se no, quale è la classe di grammatiche a potenza minima tra quelle che generano L?
2. Si scriva una rete di Petri che riconosca L. La RdP scritta è a potenza minima tra quelle che riconoscono L?

Esercizio 2 (10 punti)

Si consideri la funzione (parziale) $car_x : N \rightarrow \{s, e, b\}$ che descrive i caratteri di una stringa *x*. Più precisamente, $car_x(i)$ restituisce il carattere in posizione i-esima della stringa *x* (ed è indefinito se *x* non ha carattere in posizione i-esima).

Si consideri la seguente specifica logica di un linguaggio L (le stringhe del linguaggio L, cioè, sono tutte e sole quelle che soddisfano le condizioni scritte sotto):

$$
\begin{aligned}
\exists n (\quad & n > 0 \wedge \\
& \forall j\, (j \geq n \Rightarrow car_x(j) = \perp) \wedge \\
& \forall j\, (0 \leq j < n \Rightarrow car_x(j) \neq \perp) \wedge \\
& car_x(0) \neq e \wedge \\
& \forall j\, (\quad car_x(j) = e \wedge car_x(j+1) = e \wedge \\
& \qquad car_x(j-1) \neq e \wedge car_x(j+2) \neq e \\
& \qquad \Rightarrow \\
& \qquad car_x(j-1) = s \;))
\end{aligned}
$$

1. Descrivere a parole come è fatto L, e dare almeno 2 esempi di stringhe che appartengono ad L e almeno 2 esempi di stringhe che non appartengono ad L. Gli esempi devono essere tutti significativi, nel senso che devono soddisfare o violare la specifica in modi diversi.
2. Scrivere un automa che riconosce L. L'automa deve essere a potenza minima tra quelli che riconoscono L.

Esercizio 3 (11 punti)

Il `datalog` è un linguaggio di interrogazione per basi di dati. Data una query `datalog` Q, si indica con Q(D) l'insieme di risposte a Q ottenute sul database D.

Si parta dalle seguenti definizioni e fatti noti su `datalog`:

- Si dice che Q1 è *contenuta* in Q2 se $Q1(D) \subseteq Q2(D)$ per ogni database D.
- Due query datalog Q1 e Q2 si dicono invece *equivalenti* se $Q1(D) \subseteq Q2(D)$ e $Q2(D) \subseteq Q1(D)$ per ogni database D.
- Il problema di determinare se due generiche query `datalog` siano equivalenti è indecidibile.

A partire da questi fatti (e solo da questi), è possibile concludere la decidibilità o indecidibilità dei seguenti problemi?

1. Determinare se una generica query `datalog` è contenuta in un'altra generica query `datalog`.
2. Determinare se una generica query `datalog` è equivalente a una query `datalog` prefissata.
3. Determinare se una query `datalog` prefissata è equivalente a un'altra query `datalog` prefissata.

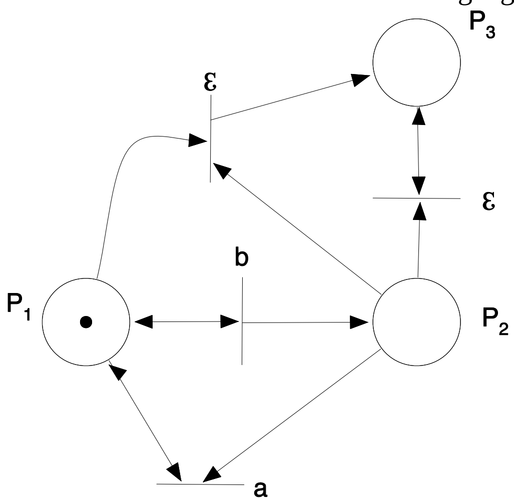
NB: per questo esercizio non è importante conoscere la struttura delle query `datalog`, né il meccanismo di calcolo delle risposte alle query.

Soluzioni – Parte I

Esercizio 1
1. Una grammatica a potenza minima che genera il linguaggio desiderato è la seguente:
$S \rightarrow HBS \mid \varepsilon$
$B \rightarrow Bb \mid b$
$H \rightarrow bHa \mid HH \mid \varepsilon$

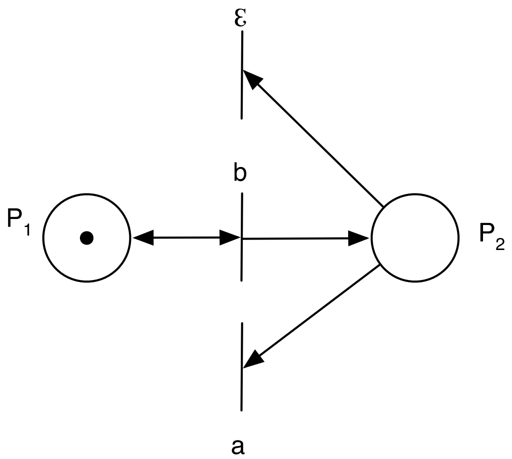
Una grammatica alternativa (sempre a potenza minima) e con meno produzioni, è la seguente:
$S \rightarrow bSaS \mid bS \mid \varepsilon$

2. Una rete di Petri che riconosce il linguaggio desiderato è la seguente:



In cui le marcature finali sono 2, M_1, ed M_3, definite nel seguente modo: $M_1(P_1) = 1$, $M_1(P_2) = M_1(P_3) = 0$ e $M_3(P_3) = 1$, $M_3(P_2) = M_3(P_1) = 0$.

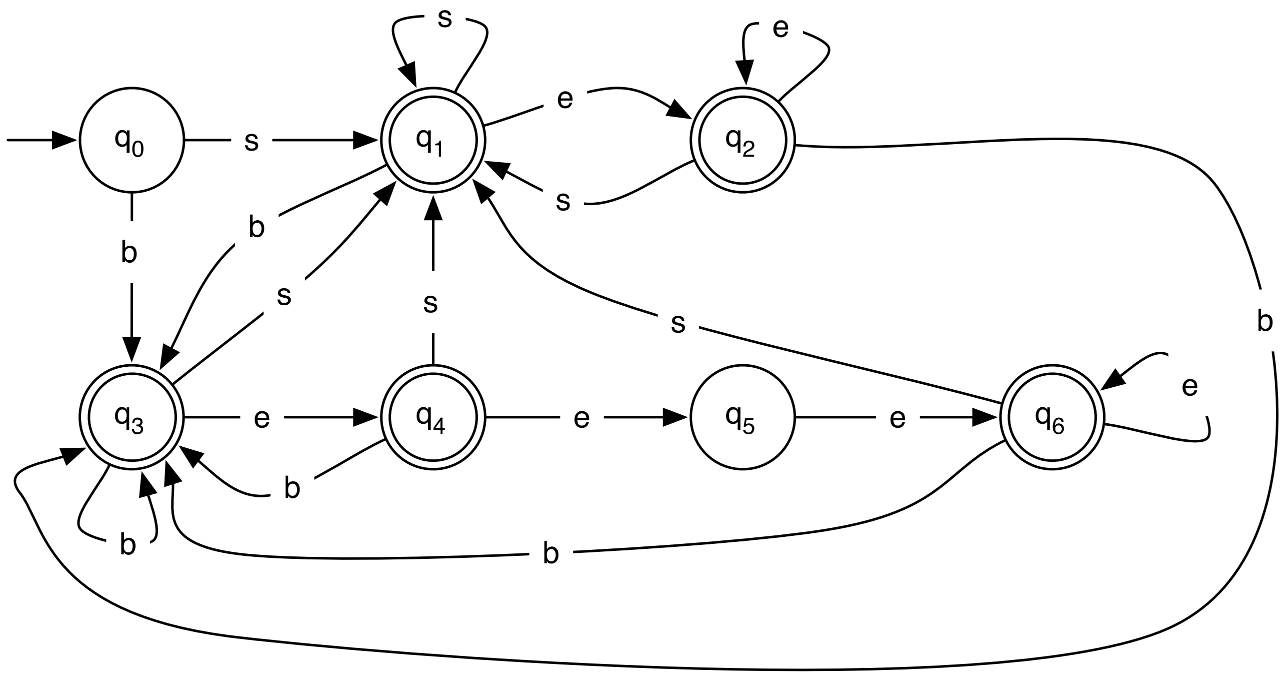
In alternativa, un'altra rete di Petri, più compatta, che risolve il problema è la seguente:



In questo caso la marcatura finale è una sola, e coincide con quella iniziale.

Esercizio 2
Il linguaggio specificato è fatto di tutte e sole le stringhe di almeno 1 carattere che non iniziano per *e*, e tali che ogni volta che si incontrano esattamente 2 *e* consecutive (cioè 2 e precedute e seguite da un simbolo diverso da *e*, eventualmente da ⊥) il simbolo precedente le *e* è una *s*.
2 stringhe che appartengono: bbbbsee, sebbbeeebessseeb
2 stringhe che non appartegono: essss, bsbbeebb

Un automa a stati finiti che riconosce il linguaggio L è il seguente:



Esercizio 3

1. Il problema è indecidibile. Infatti, se fosse possibile decidere il contenimento tra due generiche query Q1 e Q2 si potrebbe immediatamente decidere anche la loro equivalenza, il che è assurdo. A tal fine si noti che, poiché Q1 è equivalente a Q2 se e solo se Q1 è contenuta in Q2 e Q2 è contenuta in Q1, c'è una riduzione dal problema dell'equivalenza (che è noto essere indecidibile) a quello del contenimento (che è quindi più generale e pertanto indecidibile).
2. In assenza di altre informazioni non è possibile concludere nulla sulla decidibilità di questo problema. Si tratta infatti di un caso specifico di un problema indecidibile (quello dell'equivalenza tra due query generiche).
3. In questo caso il problema è banalmente decidibile in quanto si tratta di una domanda con risposta chiusa sì/no che non dipende da alcun ingresso.