**Algoritmi e Principi dell'Informatica**
**Appello del 17 gennaio 2019**
**Chi deve sostenere l'esame integrato (API) deve svolgere tutti gli esercizi in 2 ore.**
**Chi deve sostenere solo il modulo di *Informatica teorica* deve svolgere gli Esercizi 1 e 2 in 1 ora.**
**Chi deve sostenere solo il modulo di *Informatica 3* deve svolgere gli Esercizi 3 e 4 in 1 ora.**
**NB: i punti attribuiti ai singoli esercizi hanno senso solo con riferimento all'esame integrato e hanno valore puramente indicativo.**

**Esercizio 1 (6 punti)**
Si considerino i seguenti linguaggi:

- $L_1 = \{a^m b^n \mid 1 \leq m \leq n \leq 2m\}$.
- $L_2 = \{a^m b^n \mid 1 \leq m < n < 2m\}$.

Per ciascuno di essi, si fornisca una grammatica a potenza generativa minima che lo generi.

**Esercizio 2 (9 punti)**
In uno spazio a *d* dimensioni, un punto *p* domina un punto *q* se

- in ogni dimensione, la coordinata di *p* è maggiore o uguale a quella corrispondente di *q*;
- c'è almeno una dimensione in cui la coordinata di *p* è strettamente maggiore di quella di *q*.

Ad esempio, a 3 dimensioni, il punto *p*=(1,2,3) domina il punto *q*=(0,2,1), mentre non domina il punto *r*=(0,1,4).
E' già disponibile una funzione binaria *elem* che, con argomenti *a* (array) e *i* (indice), restituisce l'(*i*+1)-esimo elemento dell'array *a* (il primo elemento ha indice 0). Si conviene inoltre che, per un array *a* di *k* elementi, sia $elem(a,i)=\perp$ per $i \geq k$.
Un punto *d*-dimensionale viene rappresentato come un array di *d* elementi, cui si può accedere tramite la suddetta funzione *elem*. Oltre a *elem*, si possono considerare già disponibili i comparatori (>, ≥, =) e il simbolo ⊥, mentre la costante d, se ritenuta necessaria, deve essere definita attraverso un'opportuna formula.

a) Si specifichino in logica del prim'ordine i seguenti predicati binari:
   - *uguale*, che indica che i suoi due argomenti sono due punti uguali;
   - *stessaDim*, che indica che i suoi due argomenti sono due punti di uguale dimensionalità;
   - *domina*, che indica che il primo argomento è un punto che domina il secondo argomento.

Il programma SKYLINE riceve in ingresso un insieme P di punti <u>tutti diversi e tutti con la stessa dimensionalità</u>, e restituisce in uscita S, la cosiddetta "skyline" di P, ossia l'insieme dei punti di P che non sono dominati da nessun altro punto di P.

b) Si utilizzi la notazione di Hoare per specificare opportune pre-condizioni e post-condizioni per il programma SKYLINE. Si possono considerare già disponibili unicamente i predicati definiti al punto a nonché il simbolo di appartenenza insiemistica (∈) applicato a P e a S.

**Esercizio 3 (7 punti)**
Trovare un limite superiore per la seguente ricorrenza:
$T(n) = n^2 + T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lfloor n/4 \rfloor) + T(\lfloor n/8 \rfloor) + \ldots + T(\lfloor n/2^k \rfloor)$,
dove k è una costante intera maggiore di 1 e n è una potenza di 2.

**Esercizio 4 (8 punti)**
Si descriva, preferibilmente mediante uso di adeguato pseudocodice, un algoritmo che implementi la SKYLINE specificata nell'esercizio 2, ossia che riceva in ingresso un insieme di punti P e produca in uscita un sottoinsieme di punti S di P che soddisfino la specifica di SKYLINE. Si valuti la complessità temporale asintotica dell'algoritmo rispetto ai due parametri n (cardinalità dell'insieme di punti P) e d (numero di dimensioni).

**Tracce delle soluzioni**

**Esercizio 1**
Per $L_1$: $S \to ab \mid abb \mid aSb \mid aSbb$
Per $L_2$: $S \to aabbb \mid aSb \mid aSbb$

**Esercizio 2**
a)
$\forall x \forall y\ (\mathit{uguale}(x,y) \leftrightarrow (\forall i\ \mathit{elem}(x,i)=\mathit{elem}(y,i)))$
$\forall x \forall y\ (\mathit{stessaDim}(x,y) \leftrightarrow (\forall i\ (\mathit{elem}(x,i)=\bot \leftrightarrow \mathit{elem}(y,i)=\bot)))$
$\forall x \forall y\ (\mathit{domina}(x,y) \leftrightarrow (\mathit{stessaDim}(x,y) \wedge$
$\quad \forall i\ (\mathit{elem}(x,i) \neq \bot \to \mathit{elem}(x,i) \geq \mathit{elem}(y,i)) \wedge \exists i\ (\mathit{elem}(x,i) \neq \bot \wedge \mathit{elem}(x,i) > \mathit{elem}(y,i))))$

b)
Pre-condizione: specifichiamo che tutti i punti sono diversi e che hanno tutti la stessa dimensionalità.
$\forall x \forall y (x \in P \wedge y \in P \to \mathit{stessaDim}(x,y) \wedge (x \neq y \to \neg \mathit{uguale}(x,y)))$

---

SKYLINE

---

Post-condizione: specifichiamo che i punti di S sono esattamente quei punti di P non dominati da nessun altro punto di P.

$\forall x (x \in S \leftrightarrow x \in P \wedge \neg \exists y\ (y \in P \wedge \mathit{domina}(y,x))\ )$

**Esercizio 3**

Utilizziamo il metodo di sostituzione, ipotizzando che $T(n) \leq c\ n^2$, per una qualche costante positiva c.
Otteniamo:
$T(n) = n^2 + T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lfloor n/4 \rfloor) + T(\lfloor n/8 \rfloor) + \ldots + T(\lfloor n/2^k \rfloor)$
$\leq n^2 + cn^2/4 + cn^2/4^2 + cn^2/4^3 + \ldots + cn^2/4^k$
$= n^2(1+ c/4+ c/4^2 + c/4^3 + \ldots + c/4^k)$
$= n^2(1+ c/4 \cdot (1+ 1/4 + 1/4^2 + \ldots + 1/4^{k-1}))$
$< n^2(1+ c/4 \cdot 1/(1-1/4))$
$= n^2(1+ c/4 \cdot 4/3)$
$= n^2(1+ c/3)$
L'espressione ottenuta soddisfa l'ipotesi se $n^2(1+ c/3) \leq c\ n^2$ ossia se $c \geq 3/2$.
Poniamo $T(0)=0$, verificando così l'ipotesi anche nel caso base $n=0$.
In definitiva, $T(n)=O(n^2)$.

**Esercizio 4**

Uno schema di algoritmo che segue in modo naturale la specifica del problema consiste in

1. Definire una procedura che dati due punti A e B stabilisca se uno dei due domina l'altro. Una tale procedura, e.g. `domina(A,B)` che restituisce il risultato ternario A domina B, o B domina A o non-dominanza, è facilmente codificabile con una complessità lineare rispetto alla dimensione dei punti d.
2. Il main non fa altro che scandire tutti i punti di `P`. Per ognuno di essi, diciamolo `A`, verifica, mediante la procedura `domina`, se `A` domina o è dominato dai punti già in `S` (inizialmente vuoto).
   a. Se `A` domina qualche punto di `S`, `A` viene inserito in S e vengono eliminati tutti i punti dominati da `A`.
   b. Se `A` è dominato da qualche punto di `S`, `A` non viene inserito in `S`.
   c. Se `A` non domina alcun punto di `S` né è dominato da essi, `A` viene inserito in `S`.
3. Si noti che non è possibile che `A` domini e sia dominato da qualche punto di `S` perché la proprietà di dominanza è transitiva e i punti di `S` sono dall'inizio non reciprocamente dominanti e tale proprietà è mantenuta dopo l'esame di ogni nuovo punto.

La complessità del main è palesemente O($n^2$) (secondo lo schema della classica $\sum_{1}^{n} i$). Siccome ogni chiamata della procedura `domina` costa O(d) ed è indipendente da n, la complessità totale è O($d.n^2$).