Algoritmi e Principi dell'Informatica

Appello del 19 luglio 2018

Chi deve sostenere l'esame integrato (API) deve svolgere tutti gli esercizi in 2 ore.

Chi deve sostenere solo il modulo di *Informatica teorica* deve svolgere gli Esercizi 1 e 2 in 1 ora.

Chi deve sostenere solo il modulo di *Informatica 3* deve svolgere gli Esercizi 3 e 4 in 1 ora.

NB: i punti attribuiti ai singoli esercizi hanno senso solo con riferimento all'esame integrato e hanno valore puramente indicativo.

Si considerino le seguenti formule del prim'ordine, interpretate sui numeri interi (relativi):

- F1: $A(x) \leftrightarrow \exists z(z > 0 \land x = 2 \cdot z)$
- F2: $B(x, y) \leftrightarrow x > 1 \land \exists z(1 < z < y \land y = x \cdot z)$
- F3: $C(x) \leftrightarrow x > 0 \land \neg\exists z(B(z, x))$
- F4: $\forall x(A(x) \rightarrow \exists z\exists w(C(z) \land C(w) \land x = z + w))$

Esercizio 1 (8 punti)

Si consideri ora la formula FT:

$F4 \land \forall x(F3) \land \forall x\forall y(F2) \land \forall x(F1)$

Che proprietà dei numeri interi esprime FT? Spiegare brevemente i motivi della risposta.

Esercizio 2 (8 punti)

1. È decidibile il problema di stabilire se FT, interpretata sui numeri interi è vera?
2. Si consideri ora la formula FL:
   $(A(x) \rightarrow (C(z) \land C(w) \land x = z + w)) \land \forall x(F3) \land \forall x\forall y\,(F2) \land \forall x\,(F1)$
   È decidibile il problema di stabilire se FL, interpretata sui numeri interi è soddisfacibile?

Esercizio 3 (8 punti)

Si fornisca un limite asintotico superiore per l'espressione T(n) definita dalla seguente equazione di ricorrenza:

$T(n) = T(n/2) + n(2 + \sin(n\pi/2))$.

Esercizio 4 (8 punti)

Si consideri il seguente problema: dati in ingresso un automa a stati finiti e uno dei suoi stati finali, sia esso *q*, si deve dire se *q* è raggiungibile dallo stato iniziale. Si descriva un algoritmo per il problema e se ne valuti la complessità temporale.

Algoritmi e Principi dell'Informatica

July 19, 2018

The time available to complete exercise solutions is **2 hours**

Consider the following first-order formulas, interpreted on the integer numbers:

- F1: $A(x) \leftrightarrow \exists z(z > 0 \wedge x = 2 \cdot z)$
- F2: $B(x, y) \leftrightarrow x > 1 \wedge \exists z(1 < z < y \wedge y = x \cdot z)$
- F3: $C(x) \leftrightarrow x > 0 \wedge \neg\exists z(B(z, x))$
- F4: $\forall x(A(x) \rightarrow \exists z\exists w(C(z) \wedge C(w) \wedge x = z + w))$

Exercise 1 (8 points)

Consider now the following formula FT:

$F4 \wedge \forall x(F3) \wedge \forall x\forall y(F2) \wedge \forall x(F1)$

What property about integers does FT express? Briefly explain your answer.

Exercise 2 (8 points)

1. Is it decidable to determine whether FT, interpreted on the integers, is true?
2. Consider now the following formula FL:
   $A(x) \rightarrow (C(z) \wedge C(w) \wedge x = z + w)) \wedge \forall x(F3) \wedge \forall x\forall y\,(F2) \wedge \forall x\,(F1)$
   Is it decidable to determine whether FL, interpreted on the integers, is satisfiable?

Exercise 3 (8 points)

Provide an asymptotic upper bound for the expression T(n) defined by the following recurrence:

$T(n) = T(n/2) + n(2 + \sin(n\pi/2))$.

Exercise 4 (8 points)

Consider the following problem: given a finite state automaton and one of its final states (call it q) as input, state whether q is reachable from the initial state. Describe an algorithm for the problem and provide its time complexity.

Tracce delle soluzioni

Esercizio 1

- F1 esprime il fatto che x sia un numero pari positivo
- F2 esprime il fatto che x sia un divisore (non banale) di y
- F3 esprime il fatto che x sia un numero primo
- Quindi la congiunzione FT esprime il fatto che ogni numero pari sia la somma di due numeri primi, nota come *congettura di Goldbach*.

Esercizio 2

- FT, che esprime la congettura di Goldbach, è una formula chiusa: essa è vera (molto probabilmente) o falsa, ma in ogni caso il fatto che sia vera o falsa è decidibile, anche se non ancora deciso.
- Analogamente, una formula contenente variabili libere è soddisfacibile se e solo se esiste un assegnamento di valori ad esse (nel dominio di interpretazione) che la rende vera; quindi il problema è "chiuso" anche in questo caso. Inoltre la formula è soddisfatta ad esempio per x = 20, z = 13, w = 7.

Esercizio 3

Il Master Theorem non si può applicare poiché è violata la seguente condizione (di "regolarità"):

$$n/2(2+\sin((n\pi/2)/2)) \leq cn(2+\sin(n\pi/2)), \text{ per n grande e } c<1$$

Le curve $n/2(2+\sin((n\pi/2)/2))$ e $n(2+\sin(n\pi/2))$ oscillano e si intersecano sempre, quindi a maggior ragione la relazione non vale moltiplicando $f(n)=n(2+\sin(n\pi/2))$ per $c<1$.

Per risolvere il problema si può procedere in due modi.

1) Il primo modo consiste nel formulare un'ipotesi per un limite asintotico superiore per T(n) e poi sottoporre tale ipotesi a verifica (ad esempio, con il metodo di sostituzione).

Se proviamo a supporre che $T(n) = O(n)$ possiamo quindi ipotizzare che $T(n) \leq dn$, e procediamo come segue:

$$T(n) = T(n/2)+n(2+\sin(n\pi/2)) \leq dn/2 + n(2+\sin(n\pi/2)) \leq dn/2 + 3n$$

La relazione $dn/2 + 3n \leq dn$ è verificata per $d > 6$ (e $n > 0$).

Occorre poi verificare la condizione iniziale, che è soddisfatta, ad esempio con $T(1) = 1$.

Questo conclude la verifica e conferma che $T(n) = O(n)$.

2) Un secondo modo consiste nel notare come l'espressione $f(n) = n(2 + \sin(n\pi/2))$ sia maggiorata da $g(n) = 3n$. La ricorrenza ottenuta sostituendo $n(2 + \sin(n\pi/2))$ con 3n, indicata di seguito con T', è risolvibile con il teorema dell'esperto:

$$T'(n) = T'(n/2) + 3n$$

Ricadiamo infatti nel terzo caso del teorema e otteniamo $T'(n)= \Theta(n)$.

A questo punto basta osservare che $T(n) \leq T'(n)$ per concludere che $T(n) = O(n)$.

Il fatto intuitivo che $T(n) \leq T'(n)$ può essere mostrato per induzione come segue.

Caso base: basta porre $T'(1) = T(1)$; la relazione $T(1) \leq T'(1)$ è quindi verificata per costruzione. (Si noti che il teorema dell'esperto non dipende dalla scelta di T'(1), che non ha impatto sul comportamento asintotico di T'(n).)

Ipotesi induttiva: $T(i) \leq T'(i)$ per tutti i valori di i da 1 a n. Passo induttivo: se vale l'ipotesi induttiva, allora $T(n+1) \leq T'(n+1)$. Infatti, espandendo le ricorrenze per T(n+1) e T'(n+1), tutti i termini della prima sono ≤ dei termini della seconda, ossia:

$$T(n+1) = T((n+1)/2) + f(n+1)$$

$$T'(n+1) = T'((n+1)/2) + g(n+1)$$

laddove $T((n+1)/2) \leq T'((n+1)/2)$ per ipotesi induttiva e $f(n+1) \leq g(n+1)$.

Esercizio 4

Si memorizza l'automa come grafo e si fa una visita in ampiezza a partire dallo stato iniziale: appena q viene raggiunto, si risponde positivamente. Se alla fine della visita q non viene raggiunto, si risponde negativamente. La valutazione della complessità è esattamente la stessa di una visita in ampiezza: $O(|V|+|E|)$.