Algoritmi e Principi dell'Informatica

Appello del 27 Settembre 2012

Chi deve sostenere l'esame integrato (API) deve svolgere tutti gli esercizi in 3 ore.

Chi deve sostenere solo il modulo di Informatica teorica deve svolgere l'Esercizio 1 e l'Esercizio 2 in 1 ora e 30 minuti.

Chi deve sostenere solo il modulo di Informatica 3 deve svolgere l'Esercizio 3 e l'Esercizio 4 in 1 ora e 30 minuti.

NB: i punti attribuiti ai singoli esercizi hanno senso solo con riferimento all'esame integrato e hanno valore puramente indicativo.

Esercizio 1 (punti 7/30-esimi se si compilano solo le prime 3 righe, 9/30 se si compilano tutte le righe)

Si considerino i seguenti linguaggi:

$L1 = \{a^nb^n | n \geq 1\} \cup \{a^nb^{2n} | n \geq 1\}$

$L2 = \{1a^nb^n | n \geq 1\} \cup \{2a^nb^{2n} | n \geq 1\}$

$L3 = \{a^n1b^n | n \geq 1\} \cup \{a^n2b^{2n} | n \geq 1\}$

$L4 = \{a^nb^n1 | n \geq 1\} \cup \{a^nb^{2n}2 | n \geq 1\}$

e le seguenti famiglie di macchine astratte, usate come riconoscitori di linguaggi:

AF: automi a stati finiti

APD: automi a pila determinstici

APN: automi a pila nondeterministici

ARP: reti di Petri

Si riempia la seguente tabella indicando in ogni casella se la famiglia indicata nella riga è in grado di riconoscere il linguaggio indicato nella corrispondente colonna; giustificare brevemente le risposte.

	L1	L2	L3	L4
AF				
APD				
APN				
ARP				

Esercizio 2 (punti 9/30-esimi)

All'inizio di ogni anno accademico ogni studente deve compilare il proprio piano di studi. Si formalizzino mediante formule del prim'ordine le seguenti regole (semplificate) relative alla compilazione del proprio piano di studi da parte degli studenti.

- Il piano di studi di uno studente consiste in un numero di insegnamenti non inferiore a 3 e non superiore a 10 tra quelli ancora disponibili nel proprio corso di studi (si assuma che esista una tabella con l'elenco degli insegnamenti che ogni studente può ancora scegliere; non si prendano in considerazioni eventuali obbligatorietà e mutue esclusioni; né viene chiesto di specificare come la tabella viene aggiornata ogni anno).
- Ad ogni insegnamento è associato un numero di crediti. Il totale dei crediti "acquistati" nel piano di studi non deve essere inferiore a 50 e non può essere superiore a 80.

NB: la formalizzazione deve specificare anche le regole intrinsecamente connesse con l'uso e il significato delle tabelle utilizzate: ad esempio, un piano di studi non può contenere più occorrenze dello stesso esame; …

Suggerimento

Si definiscano adeguate variabili per rappresentare studenti, insegnamenti e crediti, nonché opportune funzioni e/o predicati per rappresentare l'elenco degli insegnamenti offerti, il piano di studi, i crediti associati a ogni insegnamento, …

NB: potrebbe essere conveniente, anche se non necessario, che le liste degli insegnameti contenute sia nella tabella di quelli disponibili che nel piano di studi siano costituite da elementi "adiacenti", …

Esercizio 3 (punti 8/30)

Si consideri un modello di Macchina di Turing a nastro singolo (usato sia come ingresso che come memoria ed eventuale output) ma dotata di due testine di lettura-scrittura (che, all'inizio della computazione sono posizionate entrambe sul primo carattere significativo del nastro).

Si delineino due MT di tal fatta che riconoscano, rispettivamente il linguaggio $L_1 = \{ww^R \mid w \in \{a.b\}^+\}$ (al solito w^R denota la stringa speculare di w) e il linguaggio $L_2 = \{ww \mid w \in \{a.b\}^+\}$.

Se ne forniscano le rispettive funzioni di complessità temporale (a meno dell'ordine di grandezza definito dalla classe Θ). Non è necessario fornire una definizione completa delle due macchine, ma essa deve essere sufficientemente precisa da permettere una valutazione inequivoca della funzione di complessità.

Il punteggio attribuito alla soluzione sarà tanto maggiore quanto migliore la complessità ottenuta.

NB: tra i diversi modi, tra loro sostanzialmente equivalenti, per definire la funzione δ di questo tipo di macchina si propone il seguente, dall'interpretazione ovvia:

$\delta: Q \times A \to Q \times (A \times \{R, L, S\})^2$;

Si noti che ciò potrebbe creare una situazione di conflitto nel caso le due testine si trovassero nella stessa posizione; questo dettaglio è irrilevante ai fini dell'esercizio; si può comunque assumere che in una situazione del genere venga convenzionalmente scelto come simbolo da scrivere sul nastro al posto di quello letto, quello indicato per la testina 1.

Esercizio 4 (punti 8/30)

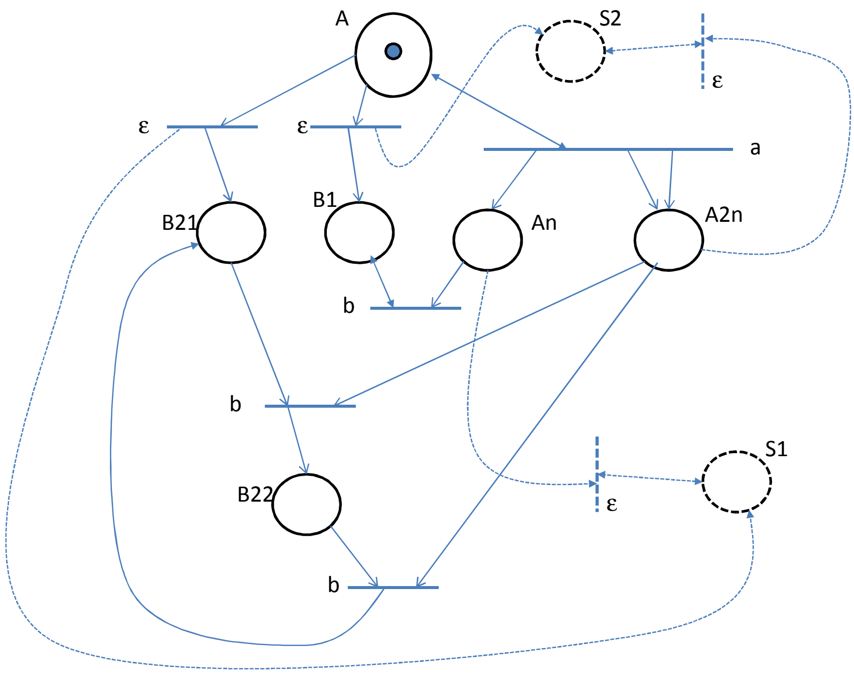
Si stabilisca quali sono i rapporti minimo e massimo tra il numero di nodi interni rossi e neri in un generico albero rosso-nero. Si giustifichi brevemente la risposta.

Soluzioni (parziali e schematiche)

Esercizio 1

	L1	L2	L3	L4
AF	NO	NO	NO	NO
APD	NO	SI	SI	NO
APN	SI	SI	SI	SI
ARP	SI	SI	SI	SI

La ARP seguente riconosce L1assumendo come marcatura iniziale quella indicata in figura e come marcature di accettazione quella con un solo token in B22 e S2 (rispettivamente in B1 e S1) e nessun token in tutti gli altri posti; essa è facilmente modificabile in modo da riconoscere anche gli altri linguaggi.



Breve illustrazione

Un numero arbitrario n di scatti della transizione etichettata ‘a’ deposita n token nel posto An e 2n token in A2n. Dopo tali scatti in maniera nondeterministica una delle due transizioni uscenti da A ed etichettate ε inizia il deconteggio dei token accumulati in An e A2n rispettivamente: la transizione ‘b’ uscente da B1 può scattare esattamente n volte lasciando un token in B1 e nessun token in An; simmetricamente per le transizioni uscenti da B21 e B22.

Perché la stringa sia riconosciuta è però necessario che alla fine degli scatti tutti i posti diversi da B22 e B1 siano vuoti (e solo uno di essi contenga un token). All’uopo le due transizioni ε usenti da A innescano anche un “percorso ausiliario” segnato in modo tratteggiato in figura, con il compito di svuotare rispettivamente i posti An e A2n quando diventano irrilevanti ai fini del conteggio.

Esercizio 2

Si definiscano i seguenti simboli di variabili, funzioni e di predicati:

- st: variabile studente
- es: variabile esame
- cr: variabile crediti
- CR(es): numero di crediti dell'esame es
- Tab(st, i): l'i-esimo esame nella tabella di esami disponibile per lo studente st (NB: la tabelle non contiene ripetizioni). Se per un certo valore di i non esiste un esame nella tabella il valore Tab(st, i) è $\perp$ (indefinito).
- P_S(st, i): l'i-esimo esame inserito nel piano di studi dello studente st. Se per un certo valore di i non esiste un esame nel piano di studi il valore P_S (st, i) è $\perp$ (indefinito).
- N_Es(st) Numero di esami nel pianodi studi dello studente st.

Le formule seguenti formalizzano le regole specificate dall'esercizio:

- $\forall$st, i,j (i $\neq$ j $\rightarrow$ Tab(st, i) $\neq$ Tab(st, j) $\wedge$ P_S(st, i) $\neq$ P_S(st, j)
- $\forall$st, i , es (es = P_S(st, i) $\rightarrow$ $\exists$ j Tab(st, j) = es)
- $\forall$st, i(Tab(st, i) $\neq \perp$ $\rightarrow$ $\forall$ j(j $\leq$ i $\rightarrow$ Tab(st, i) $\neq \perp$)
- /*idem per P_S*/
- $\forall$st $\exists$ i (Tab(st, i) = $\perp$)
- $\forall$st,i (N_Es(st) = i $\leftrightarrow$ (P_S(st, i+1) = $\perp$ $\wedge$ $\forall$ k(1 $\leq$k $\leq$ i $\rightarrow$ P_S(st, i) $\neq \perp$))
- $\forall$st (3 $\leq$ N_Es(st) $\leq$ 10)
- $\forall$st ($50 \leq \sum_{i=1}^{N\_Es(st)} CR(\,\mathbf{P\_S(st, i)}) \leq 80$)
- /* la fromalizzazione della sommatoria può essere omessa in quanto ben nota*/

Esercizio 3

Una macchina a nastro singolo che riconosca L_1 può operare nel modo seguente:

- Inizialmente tiene ferma la testina 1 mentre la 2 si sposta fino alla fine della stringa (al termine di questa fase la seconda testina si riposiziona sull'ultimo carattere della stringa);
- Successivamente le due testine si spostano una a destra e l'altra sinistra verificando ad ogni passo di leggere lo stesso carattere; ciò finché entrambe non raggiungono contemporaneamente la fine della stringa di ingresso;
- NB : in questo modo la machina riconosce tutte e sole le stringhe palindrome in

  $\{a, b\}^+$; questo insieme però contiene anche stringhe non in L_1: precisamente quelle a lunghezza dispari; occorre quindi anche verificare che la lunghezza della stringa sia pari.

La complessità di questa macchina è evidentemente $\Theta(n)$.

Una macchina a nastro singolo che riconosca L_2 può operare invece nel modo seguente:

- Inizialmente le due testine si spostano verso destra, una a "velocità" doppia dell'altra, finché la prima non giunge a fine stringa; alla fine di questa fase –che, en passant, verifica anche che la lunghezza della stringa sia pari- entrambe le testine si spostano di una posizione a sinistra; quella più a sinistra marca anche la sua posizione con un carattere apposito che sarà riconosciuto dall'altra testina.
- Successivamente le due testine ripercorrono la stringa a ritroso e alla stessa "velocità" verificando di leggere sempre lo stesso carattere finché la testina di sinistra non legge un blank e quella di destra non trova la marca lasciata dall'altra.

Anche in questo caso la complessità è evidentemente $\Theta(n)$.

Esercizio 4

Un albero può essere totalmente nero (si noti che normalmente ciò avviene solo attraverso qualche cancellazione che trasformi un nodo rosso in uno nero, perché ogni nuova inserzione in un albero totalmente nero inserisce un nodo rosso; quindi l'unico modo per avere un albero totalmente nero senza operare cancellazioni è che esso consista della sola radice). In tal caso il rapporto minimo è evidentemente 0.

Al contrario, il massimo numero di nodi rossi lo si può ottenere se ogni nodo nero ha entrambi i figli rossi e tutti i nodi "pseudofoglie", ossia interni ma puntanti al NIL, sono rossi. In tal caso con una semplice induzione si dimostra che il rapporto massimo è 2.