Algoritmi e Principi dell'Informatica
Prima Prova in Itinere (modulo Informatica teorica)

27 Aprile 2018

Il tempo a disposizione è di **1 ora e 30 minuti.**

Esercizio 1 (Punti 6/15)

a. Si progetti un automa o una grammatica (solo uno dei due!) a <u>potenza minima</u> che riconosca/generi il linguaggio $L_1 = \{ (1^{2n}0^{2n}1^{n}0^{n})^m \mid n=1, m>0 \}$.
b. Si consideri ora il linguaggio $L_2 = \{ (1^{2n}0^{2n}1^{n}0^{n})^m \mid n>0, m>0 \}$, che comprende, ad esempio, le stringhe 110010, 110010110010 e 1111000011001111100001100, mentre non comprende le stringhe 101011001100, 110010111100001100 e 11110000110011001010. Si indichi, motivando opportunamente la risposta, la classe di automi/grammatiche a <u>potenza minima</u> che riconosca/generi L_2. Non serve fornire l'automa o la grammatica.

Esercizio 2 (Punti 6/15)

Si consideri un segnale su tempo continuo ad onde quadre "semiperiodico" a valore 0 o 1. Per semiperiodico si intende che esso alterna onde di durata T ad onde di durata T/2. Più precisamente, la forma del segnale è esemplificata nella figura 1 sottostante.

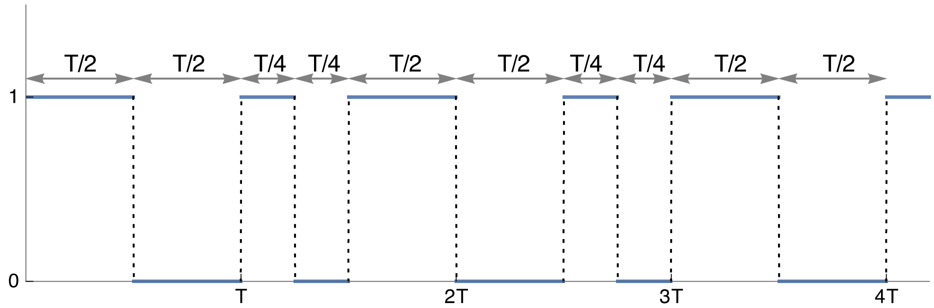


Figura 1: segnale a forma quadra a periodo T (per onde dispari) o T/2 (per onde pari).

Le onde dispari hanno durata T, in cui la prima semionda, di durata T/2, vale 1 e la seconda 0. Le onde pari hanno periodo T/2 e sono anch'esse divise in due semionde di uguale durata T/4.

Si specifichi il comportamento del segnale così descritto mediante una formula logica del prim'ordine. Sono consentiti i seguenti simboli, da non specificare ulteriormente:

- la funzione $S(t)$, che restituisce il valore del segnale (0 o 1) al tempo t;
- il predicato $int(n)$, che specifica che il valore della variabile n è un intero non negativo;
- la costante T;
- costanti intere (0, 1, …), operazioni aritmetiche (+, -, ·, /) e comparatori (<, =, ≤, …).

Esercizio 3 (punti 6/15)

1. Si consideri la funzione $g(y) = \text{if } f_y(y) = y \text{ then } y+1 \text{ else } f_y(y)$. Si dica se g è totale e se è calcolabile, motivando adeguatamente la risposta.
2. Sia A un insieme semidecidibile e B un insieme decidibile. E' facile verificare che l'insieme C = A - B è un insieme semidecidibile: si fornisca all'uopo una funzione <u>calcolabile (eventualmente anche parziale)</u> che abbia come immagine C.

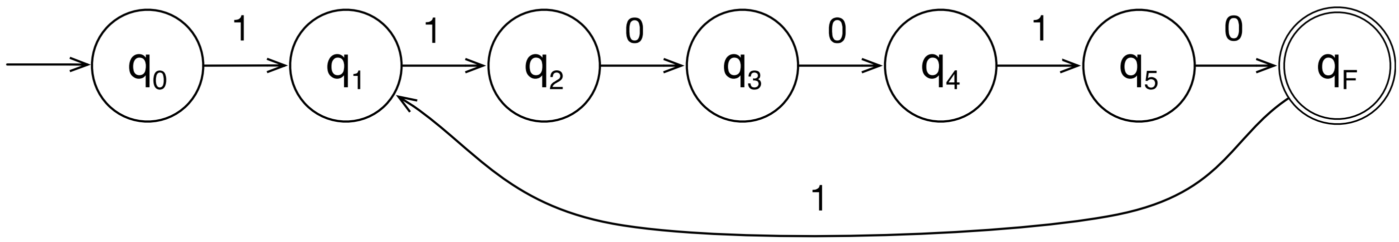
Tracce di soluzioni

Esercizio 1

Il linguaggio L_1 è generato dalla seguente grammatica regolare:

S -> 1A
A -> 1B
B -> 0C
C -> 0D
D -> 1E
E -> 0S | 0

e riconosciuto dal seguente automa a stati finiti:



Nel caso di L_2, invece, n è arbitrario e occorre ricontarlo più di una volta, come nel caso del linuaggio $a^n b^n c^n$. Come noto, per questi linguaggi è richiesta la potenza di una macchina di Turing (o di una grammatica generale).

Esercizio 2

$$
\begin{aligned}
&\forall t(\forall n\ (int(n) \land t = n\cdot 3/2\cdot \mathrm{T}\ ) \rightarrow \\
&\qquad (\forall t_1(t < t_1 \leq t + \mathrm{T}/2 \ \rightarrow S(t_1) = 1) \land \forall\ t_1\ (t{+}\mathrm{T}/2 < t_1 \leq t + \mathrm{T} \ \rightarrow S(t_1) = 0)) \\
&\qquad \land \\
&\qquad (\forall t_1\ (t + \mathrm{T} < t_1 \leq t + 5/4\cdot \mathrm{T} \ \rightarrow S(t_1) = 1) \land \forall\ t_1\ (t{+}5/4\cdot \mathrm{T} \ < t_1 \leq t + 3/2\cdot \mathrm{T} \ \rightarrow S(t_1) = 0)) \\
&\quad)
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

1) g è parziale e calcolabile: basta simulare la MT y con y in ingresso. Se essa termina, si controlla il risultato t e, se esso è y, si somma 1; altrimenti va bene t, anche se non dovesse essere definito.

2) $g_C(x)$ = if $c_B(g_A(x)) = 0$ then $g_A(x)$ else $\perp$